**МИНИСТЕРСТВО ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ (МИИТ)**

Кафедра геодезии и геоинформатики

В.Д. Власов

МЕТРОЛОГИЯ

Методические указания к лабораторным работам для студентов строительной специальности 290900

Москва 2003

МИНИСТЕРСТВО ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ (МИИТ)

Кафедра геодезии и геоинформатики

В.Д. Власов

Утверждено
редакционно-издательским
советом Университета

МЕТРОЛОГИЯ

Методические указания к лабораторным работам для студентов строительной специальности 290900

Москва 2003

УДК 528 (07)
В 58

Власов В.Д., Визиров Ю.В. Метрология: Методические указания к лабораторным работам для студентов строительной специальности 290900. – М.: МИИТ, 2003. – 20 с.

Методические указания включают лабораторные работы по темам: метрологическая аттестация геодезических приборов, математическая обработка рядов результатов измерения одной и той же физической величины, доверительная оценка точности.

Ответственный за выпуск: канд. техн. наук В.Д. Власов

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания включают лабораторные работы по метрологии для студентов строительной специальности. Представлены темы: метрологическая аттестация геодезических приборов (определение цены деления уровня нивелира, определение длины интервала ленты землемерной , определение угла поля зрения теодолита), математическая обработка рядов результатов измерений одной и той же физической величины, доверительная оценка точности.

В методических указаниях дан необходимый теоретический материал для понимания существа вопроса и представлены примеры решения типовых задач.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЦЕНЫ ДЕЛЕНИЯ УРОВНЯ НИВЕЛИРА

1. Жидкостные уровни

1.1. Точное горизонтирование поверхностей, деталей и конструкций в строительстве выполняют жидкостными уровнями. Такой уровень представляет собой стеклянную ампулу с изогнутой внутренней поверхностью. При изготовлении уровень заполняется подогретой легкой жидкостью (этиловым спиртом, эфиром), которая при остывании образует свободное пространство – пузырек газа.

Чувствительным элементом измерительного устройства является пузырек, всегда занимающий в ампуле высшее положение; регистрирующим устройством служат наружные метки, середину которых принимают за нуль-пункт. Уровень считается установленным, если концы пузырька равноудалены от нуль-пункта.

1.2. Цилиндрический уровень изобретен механиком М.Тевено в 1661 г. во Франции. Уровень имеет вытянутую ампулу, внутренняя поверхность которой тороидальная в виде бочкообразного тела, веретена. Радиус $R_ц$ продольной кривизны постоянен и равен не менее 10 м (рис.1). Вдоль стеклянной ампулы нанесена равномерная шкала с длиной деления λ= 2 мм. Если отсутствует нумерация делений, то нуль-пунктом считают середину этой шкалы.

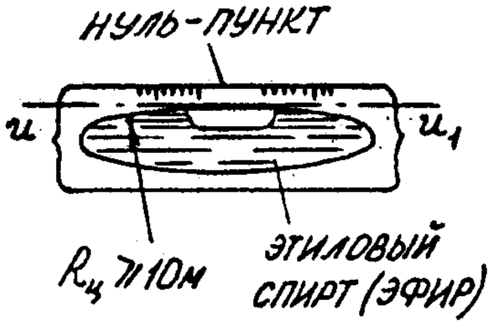

Рис.1. Цилиндрический уровень (разрез)

Ось цилиндрического уровня – это касательная UU_1 к внутренней образующей ампулы в нуль-пункте (см.рис.1). В момент приведения пузырька в нуль-пункт ось UU_1 горизонтальна , равно как и контролируемая поверхность вдоль уровня при условии строгой параллельности рабочей плоскости контактирующей базы установки уровня и оси UU_1

I.3. Круглый (шаровой . сферический уровень (рис. 2)) впервые был предложен немецким астрономом Т.Майером в 1770 г. Уровень представляет собой стеклянную ампулу, внутренняя рабочая поверхность которой имеет сферическую форму. Ампула заполнена эфиром или спиртом с пузырьком газа. Сверху стекла нанесены одна или две концентрические окружности, диаметр которых несколько больше размера пузырька; расстояние между окружностями 1-2 мм. Нуль-пунктом считается центр окружностей.

Ось OO_1 круглого уровня – это нормаль к внутренней шаровой поверхности ампулы, проходящая через нуль-пункт. Если пузырек круглого уровня занимает центральное положение (будет симметричен нуль-пункту), то ось OO_1 вертикальна. Поэтому круглый уровень используется для приведения осей и деталей в отвесное положение: таким уровнем снабжают нивелирные рейки при точных измерениях и в горных условиях.

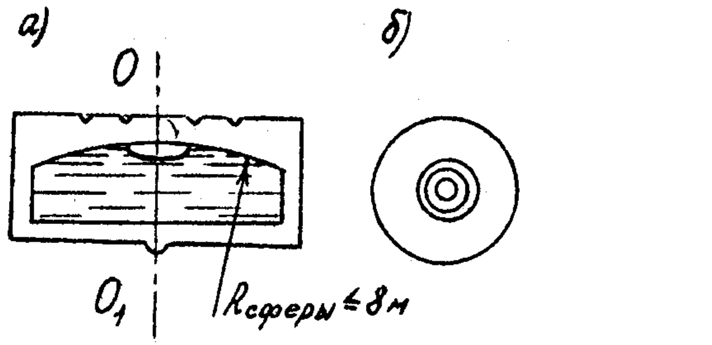

Рис.2. Круглый уровень:
а- разрез
б- вид сверху

Радиус $R_к$ шлифовки внутренней поверхности круглого уровня постоянен и в зависимости от назначения уровня выбирается от 0,5 до 5-7 м для более точных уровней. Существенно меньший по сравнению с цилиндрическим уровнем радиус кривизны круглого уровня предопределяет меньшую его точность, но способствует более быстрому нахождению равновесия измерительной системы при наклонах основания. Основным же достоинством круглого уровня является регулировка основания уже при одном положении уровня, так как приведение пузырька в нуль-пункт свидетельствует о вертикальности оси круглого уровня.

2.Основные параметры жидкостных уровней

Диапазоном показаний уровня следует считать ту часть изогнутой рабочей поверхности ампулы, которая ограничена штрихами: крайними штрихами шкалы цилиндрического уровня или внешней нарезанной окружностью уровня. В этих же пределах сохраняются нормированные точностные характеристики измерительного устройства.

Цена деления τ — это угол, на который надо наклонить ампулу, чтобы пузырек уровня сместился на одно деление дуги (рис.3).

$$\tau = \frac{\lambda}{R}\rho ,$$

где λ - длина деления (обычно 2 мм);

R - радиус кривизны образующей по исследуемому направлению;

ρ = 57,3°=3438′=206265″ - переводной коэффициент от радианной меры измерения углов к градусной мере.

Чувствительность уровня – это точность, с которой пузырек реагирует на наклон оси уровня или основания. Этот параметр выражается линейным перемещением $d\ell$ пузырька при изменении di угла наклона ампулы

$$\eta = k\frac{d\ell}{di},$$

где коэффициент k зависит от выбора единиц измерения и способа оценки смещения пузырька (визуальной, оптико-механической и т.п.).

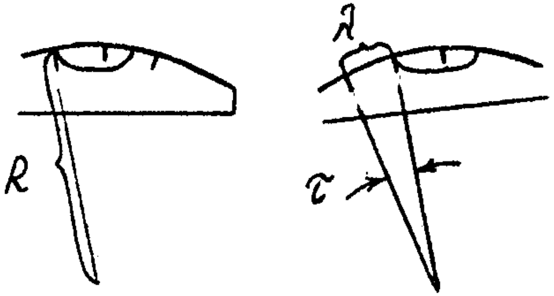

Рис.3. Цена деления уровня

Чувствительностьη повышается с уменьшением цены деления уровня τ , т.е. η можно еще подсчитать по формуле

$$\eta = \frac{1}{\tau} .$$

При одной и той же цене деления контактный уровень (рис. 4) в 2-3 раза точнее шкалового за счет эффекта совмещения изображений противоположных концов пузырька; для контактного уровня под чувствительностью геодезисты иногда подразумевают ошибку совмещения этих изображений. Порогом чувствительности считают малый угол наклона при сдвиге пузырька на 0,1 длины деления шкалы от 2 мм, т.е. на 0,2 мм.

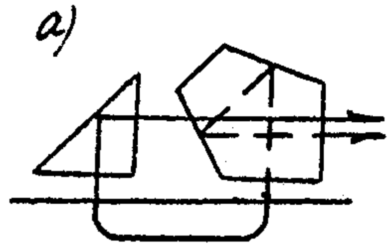

Рис.4. Контактный уровень:
а - ход лучей
б - поле зрения

3. Методика определения цены деления уровня

3.1. В основу определения этого параметра положен принцип измерения одного и того же угла ν исследуемым уровнем и по рейке.

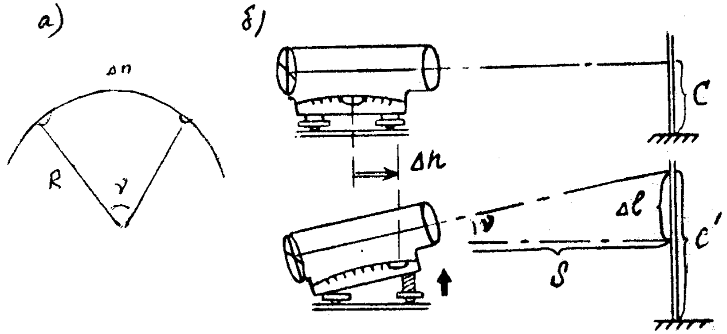

Рис.5. Определение цены деления цилиндрического уровня по рейке

На рис. 5 представлены действия, на основании которых получаем расчетную формулу определения цены деления цилиндрического уровня. Согласно рис. 5,а между двумя последовательными установками пузырька цилиндрического уровня образуется центральный угол ν и Δn делений на шкале уровня, так что

$\nu = \Delta n \cdot \tau$.

На рейке этим действиям (см.рис. 5,б) соответствует отрезок $\Delta \ell = C - C'$, так что

$$tg\ \nu = \frac{\Delta \ell}{S}$$

или $\nu = \dfrac{\Delta \ell}{S} \rho$.

Цена деления цилиндрического уровня вычисляется по формуле

$$\tau = \frac{\Delta \ell \cdot \rho}{\Delta n \cdot S}.$$

Эта формула верна и для расчета цены деления круглого уровня.

Расстояние *S* определяют по нитяному дальномеру. На рис. 6 представлено поле зрения нивелира.

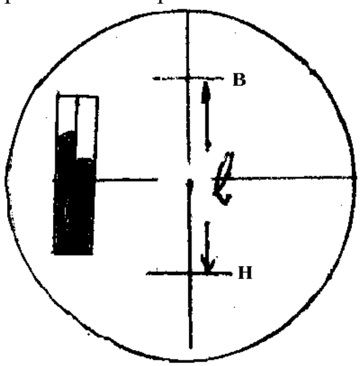

Рис.6. Поле зрения нивелира

Дальномерное расстояние *S* вычисляется по формуле

$S = 100\ \ell$,

где $\ell = H - B$,

Н и *В* – отсчеты по нижней и верхней дальномерным нитям.

Например, пусть

Н=1461 мм, *В*=1263 мм

$\ell = H - B$=1461-1263=198 мм.

$S = 100 \cdot \ell$ =100·198=19800 мм.

3.2. Цену деления круглого уровня следует определять по *N* симметричным направлениям. Рассмотрим это на примере установочного уровня нивелира.

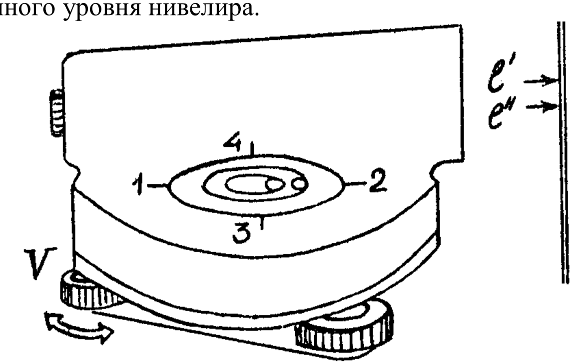

Рис.7. К определению цены деления круглого уровня по рейке

Предварительно на оправе уровня в разные стороны от нуль-пункта отмечают, например *N*=4, симметричные направления; 1 и 2 – вдоль зрительной трубы, 3-4 – в разные стороны от визирной оси (рис. 7). Нивелирную рейку закрепляют в створе подъемного винта *V*, которым при визировании на рейку далее и выполняют все необходимые наклоны уровня.

4.Лабораторная работа по определению цены деления цилиндрического уровня нивелира

4.1. П о д г о т о в и т е л ь н ы е д е й с т в и я.

1. Закрепить нивелир на штативе (на кронштейне), привести его в рабочее положение подъемными винтами по установочному уровню.

2. Установить нивелирную рейку с сантиметровыми делениями на расстояние от нивелира более 25 м или вертикальную шкалу с миллиметровыми делениями на меньших расстояниях, порядка 10 м.

3. Мысленно оцифровать штрихи шкалы ампулы цилиндрического уровня. У нивелира НВ-1 они начинаются у левого конца ампулы и проведены через 2 мм по направлению ампулы (рис. 8,а). Таких штрихов оказывается 11.

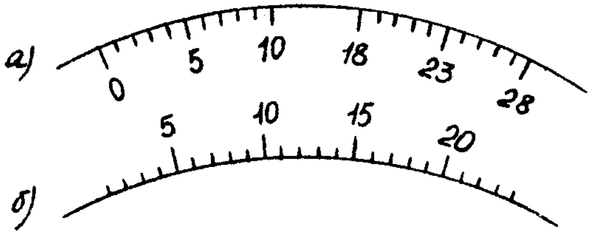

Рис.8. Оцифровка штрихов шкалы цилиндрического уровня нивелиров:
а - НВ-1; б – Н3

Затем они прерываются и отсутствуют на отрезке 16 мм. Далее опять возобновляются и следуют до правого конца ампулы через 2 мм. Если обозначить крайний левый штрих через 0, то последний штрих левой шкалы (см.рис. 8,а) будет помечен как 10; первый (левый) штрих второй (правой) шкалы уровня будет иметь пометку 18, а последний (правый) штрих шкалы будет помечен числом 28.

Иначе устроена шкала цилиндрического уровня нивелира Н3 (рис. 8,б). Здесь представлена сплошная шкала, которая содержит 24 штриха, отстоящих друг от друга на 2 мм. Если пометить крайний левый штрих как 1, то последний штрих шкалы (см.рис. 8,б) будет помечен как 24, а первый удлиненный штрих шкалы будет иметь пометку 5, последний (правый) удлиненный штрих этой шкалы будет помечен как 20.

4.2. Измерительные операции.

1. Измерить расстояние от нивелира до рейки по нитяному дальномеру или рулеткой с точностью до 0,01 м.

2. Установить элевационным винтом пузырек уровня в крайнее левое положение. Отсчеты n_1 и n_2 по шкале ампулы записать в графы 2 и 3, таблица 1. Затем взять отсчеты по рейке: по нижней нити *Н,* по верхней нити *В* и по средней нити *С* и записать в графы 7-9.

3. Переместить пузырек элевационным винтом в крайнее правое положение, взять отсчеты по его концам n'_1 и n'_2 и по рейке по нитям H', B' и C'. Записать отсчеты в соответствующие графы.

4. Вычислить длину пузырька $\delta n = n_2 - n_1$ и $\delta' n = n'_2 - n'_1$ (графа 4) и отсчеты, соответствующие середине пузырька в каждом из его положений по формулам:

$$n = \frac{n_1 + n_2}{2}, \qquad n' = \frac{n'_1 + n'_2}{2}.$$

Вычислить наклон уровня в делениях шкалы по формуле

$$\Delta n = n' - n.$$

Контроль измерений и вычислений осуществляется по постоянству длины пузырька, т.е. $/\,\delta n - \delta' n\,/ \le 0{,}2$ дел.

5. Вычислить среднее арифметическое из отсчетов по нижней и верхней нитям сетки (графа 10). Контроль:
6.

$$C = \frac{H + B}{2},$$

Допускается расхождение до 5 мм.
Вычислить изменение отсчета по рейке по средней нити (графа 11)

$$\Delta \ell = C - C'.$$

7. Вычислить расстояние между нивелиром и рейкой по формуле.
8.

$$S = 100\,(H - B).$$

Расстояние выразить в миллиметрах и записать в графу 12. Расхождение между двумя значениями в приеме допускается до 0,2 м. Такой же допуск распространяется на расстояния, полученные в приемах.

Таблица 1

Определение цены деления цилиндрического уровня

Нивелир № ____________ Тип ___________________

Дата______________ Студент гр.__________________

№№ приемов	Отсчеты по шкале уровня, дел.				Наклон уровня Δn, дел.	Отсчеты по рейке по нитям, мм				Изменение отсчета $\Delta \ell$, мм	Расстояние S, мм	Цена деления τ, сек
	n_1	n_2	n_2-n_1	$\frac{n_1+n_2}{2}$		нижняя H	верхняя B	средняя C	$\frac{H+B}{2}$			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	0,2	18,5	18,3	9,35	9,05	1946	1748	1846	1847	13	19800	15,0
	9,2	27,6	18,4	18,40		1933	1733	1833	1833		19800	
2	0,3	18,7	18,4	9,50	8,40	1949	1751	1849	1850	12	19800	15,3
	8,8	27,0	18,2	17,90		1936	1738	1837	1837		19800	
3	0,4	18,7	18,3	9,55	8,85	1952	1754	1854	1853	13	19700	15,3
	9,3	27,5	18,2	18,40		1939	1741	1841	1840		19800	
4	0,5	19,0	18,5	9,75	8,60	1954	1756	1854	1855	12	19800	14,5
	9,2	27,5	18,3	18,35		1942	1744	1842	1843		19800	
5	0,6	18,9	18,4	9,70	8,15	1955	1757	1855	1856	12	19700	15,4
	8,7	27,0	18,3	17,85		1943	1745	1843	1844		19700	
6	0,7	19,0	18,3	9,85	8,30	1961	1764	1862	1862	12	19700	15,1
	9,0	27,3	18,3	18,15		1949	1752	1850	1850		19800	

$$\tau'' = \frac{\Delta\ell мм \cdot 206265''}{\Delta n \cdot S мм}$$

$\tau_{ср}$ = 15,1″

7. Вычислить цену деления уровня по рабочей формуле

$$\tau'' = \frac{\Delta\ell_{мм} \cdot 206265''}{\Delta n \cdot S_{мм}}.$$

Здесь использовать среднее значение расстояния в приеме. Значение τ получить в секундах дуги и записать в графу 13 с точностью до 0,1″.

Для номинальной цены деления 15″ предельные значения средней цены деления составляют от 13,5″ до 16,5″.

8. Второй прием производится аналогично первому. Для этого пузырек уровня перемещают в обратном направлении. Устанавливают его элевационным винтом в крайнее левое положение. Далее работу выполняют в той же поледовательности. Число N должно быть четным (по указанию преподавателя N=4…10 в зависимости от дальнейшей обработки: сокращенной или с оценкой точности). Измерения могут выполняться по двусторонним рейкам или с использование миллиметровой шкалы, а ток же с изменением расстояния от нивелира до рейки.

5. Лабораторная работа по определению цены деления круглого уровня нивелира

1. Устанавливают нивелир на кронштейне (штативе) и подъемными винтами приводят пузырек круглого уровня в центр ампулы, при этом располагают подъемные винты так, как показано на рис.7. Карандашом на оправе уровня размечают четыре взаимоперпендикулярных направления. На рис. 9 показаны положения пузырька круглого уровня в четырех приемах.

2. Измеряют расстояние по рейки рулеткой или нитяным дальномером с точностью до 0,1 м при выполнении первых двух приемов и записывают данные в табл.2.

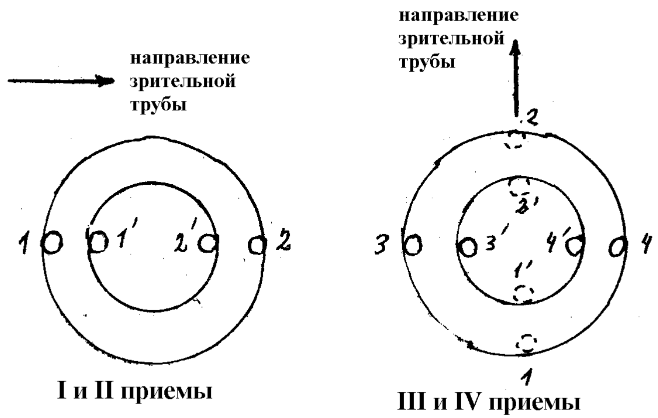

Рис.9. Установка пузырька уровня в приемах.

3. Устанавливают подъемным винтом *V* пузырек в положение 1 (см. рис. 9). По средней нити берут отсчет *C* и записывают его в графу 5, таблица 3. Тут же берут отсчеты по нижней *Н* и верхней *В* нитям сетки и записывают их в графы 3 и 4, таблица 2.

4. Подъемным винтом *V* переводят пузырек уровня в положение 1′, т.е. наклоняют уровень на одно деление (графа 4, таблица 3). По средней нити берут отсчет C' и записывают его в графу 6, таблица 3.

Снова берут отсчеты по нижней *Н* и верхней *В* нитям сетки и записывают их в графы 3 и 4, таблица 2.

5. Вычисляют изменение отсчетов по рейке $\Delta\ell = C - C'$ (графа 7, таблица 3).

6. Вычисляют разности *Н–В* (графа 5, таблица 2). Расхождение между двумя разностями допускается 5 мм. Вычисляют расстояния до рейки *S=100 (Н–В)* в миллиметрах (графа 6, таблица 2). Берут среднее арифметическое из двух значений (графа 7, таблица 2).

7. Переписывают полученное среднее значение расстояния в графу 8, таблица 3.

По рабочей формуле вычисляют цену деления уровня

$$\tau' = \frac{\Delta\ell мм \cdot 3438'}{S_{ср} мм}.$$

Полученное значение записывают в графу 9, таблица 3.

8. Переходят ко второму приему. Подьемным винтом *V* устанавливают пузырек в положение 2′. Теперь (и далее) берут отсчет *C* только по средней нити и записывают его в графу 5, таблица 3. Затем переводят пузырек уровня в положение 2 и берут отсчет *C′* по рейке по средней нити и записывают в графу 6. Далее производят вычисления, как показано выше. Во всех приемах берут одно и то же среднее расстояние $S_{ср}$.

Таблица 2

Измерение дальномерного расстояния

№ приема	Точки касания пузырька на окружностях ампулы уровня	Отсчеты по рейке, мм		Н-В, мм	Расстояние, мм, S=100(Н-В)	
		Н	В		Измеренное	Среднее
1	2	3	4	5	6	7
I	1	1737	1534	203	20300	20200
	1′	1676	1475	201	20100	

9. III и IV приемы выполняют так. Поворачивают зрительную трубу на глаз на 90°. Подъемным винтом *V* устанавливают пузырек уровня в положение 3. Чтобы взять отсчет по рейке, надо зрительную трубу вернуть в исходное положение. Берут отсчет *C* по средней нити и записывают его в графу 5, таблица 3. После этого снова поворачивают зрительную трубу на глаз на 90°. И все действия повторяются для положений пузырька 3′, 4′ и 4. Итогом всех действий становятся вычисленные значения цены деления τ′. Для номинальной цены деления уровня 10′ предельные значения средней цены деления могут изменяться от 8′до 12′.

Таблица 3

Определение цены деления круглого уровня по рейке

Нивелир №_______________ Дата_______________

Тип ____________________ Студент гр.__________

№№ приемов	Точки касания на окружностях ампулы уровня		Наклон уровня Δn, дел	Отсчеты по рейке, мм		Изменение отсчетов по рейке $\Delta\ell$, мм	Расстояния $S_{ср}$, мм	Цена деления уровня τ, мин
				ℓ'	ℓ''			
1	2	3	4	5	6	7	8	9
I	1	1′	1,0	1635	1576	59	20200	10,1
II	2′	2	1,0	1630	1572	58	20200	9,9
III	3	3′	1,0	1632	1574	58	20200	9,9
IV	4′	4	1,0	1627	1567	60	20200	10,2

$\tau_{ср}$= 10,0′

$$\tau' = \frac{\Delta\ell мм \cdot 3438'}{\Delta n \cdot S_{ср} мм}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИНЫ ИНТЕРВАЛА ЛЕНТЫ ЗЕМЛЕМЕРНОЙ

1. Некоторые положения метрологии

1.1. Одной из основных задач метрологии является обеспечение единства измерений, при котором результаты измерений конкретного вида выражены в принятой системе мер и с заданной вероятностью удовлетворяют установленным требованиям точности.

Метрологическая исправность конкретного средства измерений устанавливается его поверкой: первичной (при выпуске из производства или ремонта) и периодической (в процессе эксплуатации и хранения). Целью поверки является передача размера физической величины от эталона или образцового средства измерений – ОСИ к рабочему средству измерений – РСИ. Эта передача производится по стандартным поверочным схемам: государственным, ведомственным, локальным. Поверку проводят с помощью определенных заранее средств поверки (аппаратуры контроля метрологических характеристик), методов поверки (технологий ее проведения) и операций поверки (самостоятельных этапов контроля отдельной метрологической характеристики).

1.2. К механическим приборам для измерения длин линий относятся штриховые ленты, рулетки и подвесные проволоки. Измерительные ленты и рулетки изготавливают из стали или тесьмы, подвесные проволоки и рулетки – из стали и инвара.

Основной метрологической характеристикой любого из перечисленных мерных приборов является действительная длина от начального штриха шкалы до конечного штриха ее (фактическое расстояние между нулевым и последним помеченным штрихами шкалы).

1.3. Лента землемерная ЛЗ-20 применяется для линейных измерений в топографо-геодезических, маркшейдерских, проектно-изыскательских и строительно-монтажных работах.

Ее технические характеристики:

номинальная длина, м …………………………………….……………20
допускаемое отклонение действительной длины ленты
от номинала при t = 20+5℃ и натяжении
10 Н, мм ……………………………………………………………….…2
наименьший интервал делений, см…………….…………………..10
поперечное сечение полосы, мм……………...…………………..15×0,5

2.Определение длины интервала ленты землемерной

Лента землемерная ЛЗ как рабочее средство измерений (РСИ) поверяется методом сличения с образцовым средством измерений (ОСИ) – металлической рулеткой длиной 20,50 или 100 м.

При этом подготавливают установку для поверки. Ленту землемерную и металлическую рулетку прикладывают на плоскости друг к другу (метод сличения) отсчетными штрихами с натяжением 10 Н на обоих концах (рис.1).

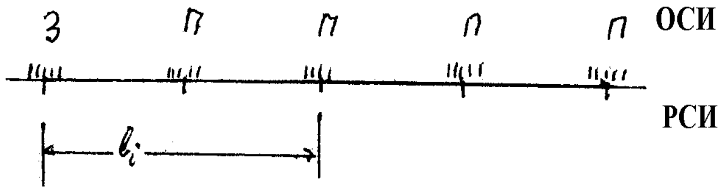

Рис.1. Установка для поверки РСИ методом сличений

На ленте землемерной через 1м сделаны специальные засечки. У каждой засечки располагается студент. Против первой (левой) засечки стоит старший студент. Он будет брать серию отсчетов, которые будут задними отсчетами (З). Все остальные студенты будут брать передние (свои) отсчеты (П). Процессом измерений командует старший студент.

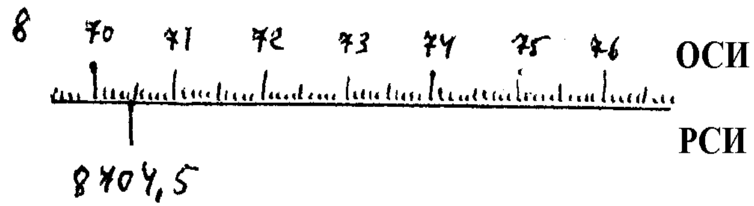

Рис.2. Отсчет по шкале ОСИ

Таблица 1

Определить длину интервала______6______м для РСИ-ленты землемерной ЛЗ №___2514_______методом сличения с ОСИ – металлической рулеткой №_310__.

Уравнение ОСИ $l_{оси}$=_20_м_+1,05_мм при температуре t_0=_+26,5_ ^{0}С и натяжении 10 Н.

Дата_10.09.03_.

Студенты группы_СЖД : Иванов И. С,, Петров С. Ю._______.

____.

____.

Температура воздуха t=_+12_ ^{0}С

Интервалы РСИ, l_i, м	Направление хода	№№ приемов	Отсчеты по РСИ,мм		Длина интервала L=П-З,мм			$V=\tilde{\ell}-\ell$, мм	V^2, мм^2
			П	З	Вычисленная	среднее			
						по ходу	Из ходов		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		1	11001,3	5000,4	6000,9			+0,75	0,5625
5-11	Прямо	2	11006,5	5004,3	6002,2	6001, 47		-0,55	0,3025
		3	11011,2	5009,9	6001,3			+0,35	0,1225
6							6001, 65		
	обратно	4	11010,0	5008,3	6001,7	6001, 83		-0,05	0,0025
		5	11026,5	5024,3	6002,2			-0,55	0,3025
		6	11008,7	5007,1	6001,6			+0,05	0,0025
								∑V=0	∑=1,1950

Отсчет по шкале ОСИ (рис. 2) включает 8 м (слева в стороне проставлена красным цветом), 70 см (прошло от 8 м), 4 мм (4 полных деления) и 0,5 мм (на глаз по штриху РСИ), итого: 8704,5 мм.

Работа выполняется в следующей последовательности:

1. В прямом ходе старший студент устанавливает в определенное положение мерную рулетку (рулетка подвижная, лента землемерная неподвижная). Командует: «Отсчет». Сам

берет отсчет и записывает его в графу 5 (первый прием), а каждый студент берет свой отсчет и записывает его в графу 4 (таблица 1). Убедившись в том, что все студенты закончили первый прием, старший студент сдвигает рулетку примерно на 5 мм вправо. Следует команда: «Отсчет». Сам берет отсчет и записывает его в графу 5 (второй прием), а каждый студент берет отсчет и записывает его в графу 4. Снова убедившись в том, что все студенты оформили второй прием, старший студент опять смещает рулетку на 5 мм вправо. Снова следует команда: «Отсчет», все студенты производят свои отсчеты и заносят их в табл.1.

2. Обратный ход выполняется так же, только смещение рулетки производится влево. После шести приемов у старшего студента заполнена графа 5, а у остальных – графа 4. Теперь старший студент выписывает свои отсчеты З (графа 5), а все остальные студенты заносят их к себе в таблицу 1 в графу 5. Старший студент обращается к кому-нибудь и выписывает к себе в графу 4 его данные из графы 4. Таким образом, все студенты будут иметь заполненные графы 4 и 5 таблицы 1.

3. Начинается математическая обработка полученных измерений. Сначала вычисляется длина интервала (графа 6)

$$\ell = П – З.$$

Контроль: расхождение между всеми шестью разностями П-З должно быть менее 2 мм. Бракованные приемы надо переделать.

Первые цифры слева отсчетов в графах 4 и 5 (если в целых не 4, а 5 цифр, то две первые цифры) указывают границы расположение интервала на ленте землемерной. В примере, мы имеем интервал от 5 до 11 м, что записано в графе 1 как 5-11. Длина интервала равна разности границ интервала или для контроля – это первая (может быть две первые) цифра слева вычисленных длин интервала. Она проставлена в графе 1.

Вычисляют средние значения длины интервала: сначала по прямому ходу, как среднее арифметическое из первых трех длин интервала в графе 6, потом по обратному ходу, как среднее арифметическое из последних трех длин интервала в графе 6 (данные заносят в графу 7), и наконец из ходов, как среднее арифметическое из двух значений в графе 7, среднее из ходов заносят в графу 8. Все средние (графы 7 и 8) вычисляют до 0,01 мм.

В графе 9 вычисляют поправки:

$$V=\tilde{\ell}-\ell,$$

где $\tilde{\ell}$ - среднее из ходов (графа 8), ℓ - вычисленные длины интервалов (графа 6). Контроль: $\sum_{i=1}^{n} V_i \approx 0$.

В графе 10 подсчитывают квадраты поправок и суммируют их.

4. Далее идут расчеты вне таблицы: производят оценку точности сличения. Сначала подсчитывают смещенную эмпирическую среднюю квадратическую ошибку:

$$m'=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} V_i^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{1{,}1950}{6-1}}=0{,}49 \text{ мм.}$$

Затем находят свободную от систематических ошибок эмпирическую среднюю квадратическую ошибку:

$$m = k_{n-1}\cdot m' = 1{,}051\cdot 0{,}49 = 0{,}51 \text{ мм.}$$

Коэффициент k_{n-1} по аргументу (n-1) находится из специальной таблицы 2.

Значения коэффициента $k_{(n-1)}$ Таблица 2

n-1	k_{n-1}	n-1	k_{n-1}	n-1	k_{n-1}
1	1.253	10	1.025	19	1.013
2	1.128	11	1.023	20	1.013
3	1.085	12	1.021	25	1.010
4	1.064	13	1.019	30	1.008
5	1.051	14	1.018	35	1.007
6	1.042	15	1.017	40	1.006
7	1.036	16	1.016	45	1.006
8	1.032	17	1.015	50	1.005
9	1.027	18	1.014	60	1.004

И наконец, вычисляют среднюю квадратическую ошибку арифметической середины:

$$m_{\tilde{\ell}}=\frac{m}{\sqrt{n}}=\frac{0{,}51}{\sqrt{6}}=0{,}21\,мм\,.$$

Полученные данные записывают в форме:

$\tilde{\ell}$ мм ± $m_{\tilde{l}}$ мм.

В примере 6001,65 мм ± 0,21 мм.

5. Приступают к составлению уравнения РСИ. Длина базиса, измеренного по РСИ, будет

$$B_{РСИ}=\ell_i=6\ м.$$

Значение ℓ_i надо брать из графы 1 табл.1.

Длину базиса, измеренного по ОСИ, найдем по формуле

$$B_{ОСИ}=(П\text{-}З)_{ср}+V_k+V_t,$$

где $(П\text{-}З)_{ср}=\tilde{\ell}$ берется из графы 8, V_k – поправка в базис за сличение, V_t – поправка в базис за температуру.

Эти поправки найдем из уравнения ОСИ. В общем виде уравнение ОСИ

$$l_{ОСИ}=l_0+\delta l_k+\alpha l_0(t-t_0),$$

где *l0* – номинальное значение ОСИ, δl_k – поправка за сличение в длину ОСИ, $\alpha l_0(t-t_0)$ – поправка за температуру, t_0 – температура сличения ОСИ, t – температура сличения РСИ, α – коэффициент линейного расширения (для стали $\alpha = 12{,}5\cdot10^{-6}$ $1/^0C$).

Часто вводится обозначение $a = \alpha l_0$, где a – изменение длины мерного прибора при изменении температуры на 1 ^{0}С. Для металлических рулеток и землемерных лент длиной 20 м коэффициент $a = 0{,}25$ мм/^{0}С.

Для выполнения лабораторной работы использовать уравнение ОСИ

$$l_{ОСИ} = 20000 + 1{,}05 + 0{,}25(t - 26{,}5^0C),\ мм$$

На основании уравнения ОСИ находим поправку за сличение в базис

$$V_k = \frac{\delta\ell_k}{\ell_0}\ell_i = \frac{+1{,}05\text{мм}}{20\text{м}}6\text{м} = +0{,}32\text{мм}$$

и поправку за температуру в базис

$$V_t = \alpha\ell_i(t - t_0) = 12{,}5\cdot 10^{-6}\cdot 1/{}^0C\cdot 6000\text{мм}\cdot$$

$$\cdot(12 - 26{,}5)^0C = -1{,}09\text{мм}.$$

Здесь принята температура сличения РСИ t = +12 ^{0}С.

Теперь можно подсчитать длину базиса, измеренного по ОСИ, по вышеприведенной формуле

$$B_{ОСИ} = (П - З)_{ср} + V_K + V_t = 6001.65 +$$

$$+ 0.32\text{мм} - 1{,}09\text{мм} = 6000{,}88\text{мм}.$$

Поправку за компарирование в длину исследуемой части РСИ найдем по формуле

$$\delta\ell_{K_{РСИ}} = B_{ОСИ} - B_{РСИ} = 6000{,}88\text{мм} - 6000\text{мм} = +0{,}88\text{мм}$$

Уравнение сличенной части РСИ в общем виде будет

$$\ell_{РСИ} = \ell_i + \delta\ell_{K_{РСИ}} + \alpha\ell_i(t - t_0),$$

где t_0 – температура сличения РСИ (то, что в уравнении ОСИ обозначено буквой t), а t – температура при измерении линии землемерной лентой.

Тогда в паспорт ленты землемерной надо записать

$$\ell_{РСИ} = 6000 + 0{,}88 + 0{,}08(t - 12^0C)\text{, мм}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УГЛА ПОЛЯ ЗРЕНИЯ ТЕОДОЛИТА

При метрологической аттестации теодолитов определяют угол поля зрения зрительной трубы. В таблице представлен журнал измерения угла поля зрения теодолита типа Т 30.

Таблица

Журнал определения угла поля зрения зрительной трубы теодолита Т 30.

Теодолит № 25846 Дата наблюдений 27 января 2003 г.

Точки визирования	Горизонтальный круг			Вертикальный круг		
	место отсчета	отсчет		место отсчета	отсчет	
		КЛ	КП		КЛ	КП
А Контроль	$n_п$	253°49′	73°49′	$n_в$	3°31′	176°31′
	$n_с$	252 49	72 48	$n_с$	2 30	177 31
	$n_л$	251 47	71 47	$n_н$	1 29	178 31
	$\frac{n_п + n_л}{2}$	252 48	72 48	$\frac{n_в + n_н}{2}$	2 30	177 31
	$\ell = /n_п – n_л/$	2 02	2 02	$\ell = /n_в – n_н/$	2 02	2 00
В Контроль	$n_п$	142 38	322 37	$n_в$	4 43	175 19
	$n_с$	141 37	321 36	$n_с$	3 42	176 20
	$n_л$	140 37	320 36	$n_н$	2 42	177 19
	$\frac{n_п + n_л}{2}$	141 37,5	321 36,5	$\frac{n_в + n_н}{2}$	3 42,5	176 19
	$\ell = /n_п – n_л/$	2 01	2 01	$\ell = /n_в – n_н/$	2 01	2 00

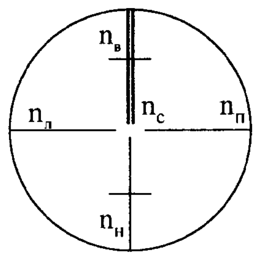

Рис. Поле зрения теодолита Т30

Работа выполняется в следующем порядке. Устанавливают теодолит на кронштейн. Приводят его в рабочее положение. Выбирают на стене точку А. Зрительную трубу наводят на точку А теми местами поля зрения, которые показаны на рисунке.

Измерения производят сначала при вертикальном круге слева от наблюдателя (КЛ), затем при вертикальном круге справа от наблюдателя (КП). Отсчеты, выполненные по горизонтальной нити сетки, заносят в графу «Горизонтальный круг», отсчеты, полученные по вертикальной нити сетки, записывают в графу «Вертикальный круг»(см. табл.).

Затем приступают к вычислениям в журнале. Контроль измерений состоит в том, что среднее арифметическое из отсчетов $n_п$ и $n_н$ должно равняться отсчету n_c соответственно по горизонтальному и вертикальному кругам. Расхождение допускается 1-2´. Этот контроль следует считать основным потому, что наведение на центр сетки нитей производится достаточно надежно, а наведения на края поля зрения вызывают определенное затруднение.

Полученные отсчеты также можно контролировать по постоянству места нуля и коллимационной ошибки.

Угол поля зрения вычисляют по формуле

$$\ell = /n_п – n_л/$$

для горизонтального круга и

$$\ell = /n_в – n_н/$$

для вертикального круга.

Чтобы ряд измерений не оказался слишком малым, следует отнаблюдать еще точку В.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЯДОВ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ ОДНОЙ И ТОЙ ЖЕ ФИЗИЧЕСКОЙ ВЕЛИЧИНЫ

1. Общие положения

В геодезии измеряют различные физические величины, например углы, длины отрезков, площади фигур. По окончании измерения получают число – результат измерения.

Процесс измерения по природе случаен, поэтому при многократном измерении одной и той же физической величины

результаты измерений отличаются друг от друга и не совпадают с истинным значением измеряемой величины. Разность между результатом измерения l и истинным значением X измеряемой физической величины является случайной ошибкой Δ результата измерения, т.е.

$$\Delta = l - X\ .$$

Результаты измерений – числа приближенные, неточные. Возникает задача оценки точности результатов измерений. Под точностью измерения понимается степень близости результата

измерения к истинному значению измеряемой величины. Точность результата измерения зависит от условий измерения, т.е. от конкретного состояния измеряемой физической величины, квалификации геодезиста, качества мерного прибора, используемого метода и состояния внешней среды. Результаты измерений, полученные в одинаковых условиях, называются равноточными. Мерой точности равноточных измерений является стандарт $\overline{m}$, который математически выражается формулой

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta_i^2}{n} = \overline{m}^2 .$$

Стандарт связан с условиями измерений, а именно если условия измерений хорошие, то стандарт – малая величина, плохим условиям измерений соответствует большой стандарт – в первом случае точность результатов измерений высокая, во

втором – низкая. Практически при конечном n вместо стандарта вычисляют среднюю квадратическую ошибку

$$m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta_i^2}{n}},$$

которая является приближенным значением стандарта.

Почти всегда истинное значение измеряемой физической величины нам неизвестна. В этих случаях используют другие приближенные значения стандарта.

Пусть некоторая физическая величина измерена многократно и получен ряд равноточных результатов измерений l_1, l_2, …, l_n. Из них находят среднее арифметическое

$$\tilde{l} = \frac{\sum_{i=1}^{n} l_i}{n},$$

и величины поправок

$$V_i = \tilde{l} - l_i, i = 1,2,...,n .$$

Далее вычисляют эмпирическую среднюю квадратическую ошибку результата измерения

$$m' = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} V_i^2}{n-1}}.$$

При малом числе измерений n эмпирическая средняя квадратическая ошибка m' не только случайно отличается от стандарта $\overline{m}$, но еще имеет значительное систематическое смещение относительно стандарта. Несмещенную оценку стандарта в этом случае определяют по формуле

$$m = k_{n-1} \cdot m',$$

где коэффициент k_{n-1} берется из табл.2 на стр.22 по аргументу (n-1), m'- эмпирическая средняя квадратическая ошибка, полученная по малому числу измерений.

Математическая обработка таких рядов включает также вычисление средней квадратической ошибки арифметической середины

$$m_{\tilde{\ell}} = \frac{m}{\sqrt{n}}$$

и предельной ошибки результата измерения

$$\Delta_{пр} = 3m.$$

2. Математическая обработка результатов равноточных измерений одной и той же физической величины

Математическую обработку результатов равноточных измерений одной и той же физической величины рассмотрим на примере определения угла поля зрения теодолита Т30. Математическая обработка выполняется в специальном бланке.

Образец вычислений дан в табл.1. Обработка выполняется в следующем порядке.

Таблица 1

Математическая обработка результатов равноточных измерений угла поля зрения зрительной трубы теодолита Т30

№№ измерений	l_i	δl_i	V_i	Vi^2
1	***2***	***3***	***4***	***5***
1	2°02´	+2´	-0,9´	0,81
2	02	2	-0,9	0,81
3	02	2	-0,9	0,81
4	00	0	+1,1	1,21
5	01	1	+0,1	0,01
6	01	1	+0,1	0,01
7	01	1	+0,1	0,01
8	00	0	+1,1	1,21
l_0=	2°00´	Σ δl=9´	ΣV=-0.2´ nή=-0.2´	ΣV² =4.88

$$\frac{\sum \delta\ell}{n} = \quad +1.125$$

$\tilde{l}$ 2°01.125´

$\tilde{l}'$ 2°01.1´

ή= -0.025´

$$m' = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} V_i^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{4,88}{8-1}} = 0,8';$$

$m=k_{n-1}\cdot m'=1.036\cdot 0.8=0.8'$

$$m_{\tilde{l}} = \frac{m}{\sqrt{n}} = \frac{0.8}{\sqrt{8}} = 0.29'$$

$$\Delta_{пр} = 3m = 3\cdot 0.8 = 2'$$

$\Delta_{пр\tilde{\ell}} = 3\, m_{\tilde{\ell}} = 3 \cdot 0.29 = 0.9'$ с вероятностью 0,997

2°01,1´±0,3´

или 2°01,1´±0,9´; 0,997

1. В графу 1 выписывают номера измерений, в графу 2 – результаты измерений из таблицы на стр. 24.
2. Вычисляют среднее арифметическое из результатов измерений по рабочей формуле

$$\tilde{l} = l_0 + \frac{\sum_{i=1}^{n} \delta l_i}{n},$$

где $\delta l_i = l_i - l_0$ - остатки, l_0 - целесообразно выбранное приближенное значение среднего арифметического. Практически удобно в качестве l_0 выбирать наименьший из результатов измерений, так как в этом случае все остатки получаются положительными. За l_0 можно брать наиболее часто повторяющееся значение результатов измерений, чтобы иметь максимальное количество нулевых остатков. Можно также за l_0 брать неизменяющуюся часть результатов измерений, тогда в качестве остатков выступают изменяющиеся части результатов измерений. В примере принят последний вариант. Величины остатков заносят в графу 3.

В значении $\tilde{l}$ надо оставлять на один десятичный знак больше, чем их имеется у результатов измерений. Из-за округления числа, выражающего $\tilde{l}$, возникает ошибка

$$\eta = \tilde{l}' - \tilde{l},$$

где $\tilde{l}$ - вычисленное значение среднего арифметического, $\tilde{l}'$ - его округленное значение.

3. В графе 4 вычисляют поправки

$$V_i = \tilde{l}' - l_i, \quad i = 1,2,\ldots,n,$$

с контролем

$$\sum_{i=1}^{n} V_i = n\eta.$$

4. Вычисляют смещенную эмпирическую среднюю квадратическую ошибку

$$m' = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} V_i^2}{n-1}}.$$

Квадраты поправок V заносят в графу 5. Значение m должно быть записано с одной – двумя значащими цифрами.

Несмещенную эмпирическую среднюю квадратическую ошибку вычисляют по формуле

$$m = k_{n-1}\cdot m'.$$

Ее вычисляют также с одной – двумя значащими цифрами.

5. Вычисляют среднюю квадратическую ошибку среднего арифметического

$$m_{\tilde{l}} = \frac{m}{\sqrt{n}}$$

с одной – двумя значащими цифрами.

6. Вычисляют предельные ошибки результата измерения

$$\Delta_{пр} = 3m,$$

и арифметической середины

$$\Delta_{пр\tilde{l}} = 3m_{\tilde{l}}$$

с вероятностью p=0,997.

7. Записывают полученные результаты в виде

$$\tilde{l} \pm m_{\tilde{l}}$$

или

$$\tilde{\ell} \pm \Delta_{пр\tilde{\ell}};\ P.$$

ДОВЕРИТЕЛЬНАЯ ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ

1. Общие положения

Пусть получен ряд результатов измерений $l_1, l_2, ..., l_n$ некоторой физической величины. В теории вероятностей считается, что каждый результат измерений есть реализация в опыте одного из возможных значений случайной величины L. Основной характеристикой случайной величины является закон распределения вероятностей. Он может быть выражен функцией распределения или плотностью распределения вероятностей. Функция распределения выступает как вероятность P появления в опыте случайного события, состоящего в том, что случайная величина L будет принимать значения, меньше *l*, что можно записать как $P(L\langle l)$. Эта вероятность есть функция от *l*, а именно $P(L\langle l) = F(l)$. Плотность распределения вероятностей f(*l*) определяется как производная от функции распределения, т.е.

$$f(l) = \frac{dF(l)}{dl}.$$

Эти характеристики случайной величины используются при оценке точности результатов измерений.

В метрологии широко используется доверительная оценка точности. К ней можно подойти следующим образом. Ряд результатов измерений $l_1, l_2, ..., l_n$ в математической статистике рассматривается как выборка $l_1, l_2, ..., l_n$ объема n из генеральной совокупности, для которой $f(l, c)$ - плотность распределения вероятностей, а c – неизвестный параметр.

Любая функция от результатов измерений в математической статистике называется статистикой. Если статистика является приближенным значением параметра c, то она называется его оценкой и обозначается $\tilde{c}$. Оценка $\tilde{c}$ называется точечной оценкой, так как является числом и на числовой оси выражается точкой. Так как $\tilde{c}$ является приближенным значением неизвестного параметра c, то возникает задача определения границ возможных расхождений между ними. Это особенно актуально при малом числе измерений, когда точечная оценка $\tilde{c}$ сама определяется не надежно. Именно такая ситуация часто встречается в метрологии. Расхождение между оценкой $\tilde{c}$ и самим параметром c выберем как $|\tilde{c} - c|$. Потребуем, чтобы это расхождение было меньше некоторого малого значения ε. Случайное событие $|\tilde{c} - c| < ε$ может произойти, а может не произойти с определенной вероятностью. Назначим некоторую достаточно большую вероятность β такую, что это событие, происходящее с вероятностью β, можно считать практически достоверным. Тогда можно записать:

$$P(|\tilde{c} - c| < ε) = β$$

Очевидно, событие $|\tilde{c} - c| < ε$ равносильно другому событию $\tilde{c} - ε < c < \tilde{c} + ε$, т.е. $P(\tilde{c} - ε < c < \tilde{c} + ε) = β$. Это равенство означает, что с вероятностью β неизвестное значение параметра *c* заключено в интервале ($\tilde{c} - ε$; $\tilde{c} + ε$). Этот интервал случаен в том смысле, что случайно его положение на оси абсцисс, определяемое его центром $\tilde{c}$. Да и длина его тоже случайна, так как ε вычисляется по опытным данным. С учетом того, что изменяется интервал, а точка остается на месте, надо говорить о том, что случайный интервал ($\tilde{c} - ε$; $\tilde{c} + ε$) накрывает неизвестную точку *c* на оси абсцисс, что и показано на рис. 1.

Интервал ($\tilde{c} - ε$; $\tilde{c} + ε$) называется доверительным интервалом, а вероятность β – доверительной вероятностью. Обычно принимают β = 0,9; 0,95 или 0,99.

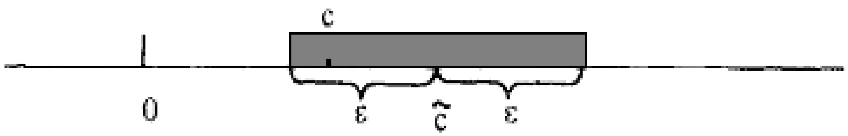

Рис. 1. Доверительный интервал

Границы доверительного интервала ($\tilde{c}$ - ε) и ($\tilde{c}$ + ε) называют доверительными границами.

При нахождении доверительных границ надо знать закон распределения точечной оценки $\tilde{c}$, а он, в свою очередь, зависит от неизвестного параметра c. Поэтому при построении доверительного интервала ($\tilde{c}$ - ε ; $\tilde{c}$ + ε) переходят от оценки $\tilde{c}$ к другой статистике, закон распределения которой не зависит от неизвестного параметра c.

2. Доверительный интервал для математического ожидания

Построим доверительный интервал для математического ожидания при условии, что результаты измерений подчинены нормальному закону. Плотность распределения вероятностей результатов измерений имеет вид

$$f(l) = \frac{1}{\overline{m}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ell - X)^2}{2\overline{m}^2}\right),$$

где, X – математическое ожидание, $\overline{m}$ - стандарт. Точечной оценкой математического ожидания является среднее арифметическое из результатов измерений:

$$\tilde{\ell} = \frac{\ell_1 + \ell_2 + \ldots + \ell_n}{n}.$$

В данном случае $\tilde{c} = \tilde{\ell}$, $c = X$. Плотность распределения вероятностей среднего арифметического зависит от оцениваемого параметра X, поэтому переходим от оценки $\tilde{\ell}$ к статистике

$$T = \sqrt{n}\,\frac{\tilde{\ell} - X}{m},$$

где m – эмпирическая средняя квадратическая ошибка. Случайная величина T подчиняется так называемому закону распределения Стьюдента с (n – 1) степенями свободы. Плотность распределения вероятностей случайной величины T имеет вид

$$S_{n-1}(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{(n-1)\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}},$$

где Γ(z) – известная гамма-функция

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} u^{z-1} e^{-u}\,du,$$

и не зависит от X. Выберем доверительный интервал для математического ожидания X так, чтобы

$$p(\,|\tilde{\ell} - X\,| < \varepsilon\,) = \beta.$$

Перейдем в левой части этого равенства от случайной величины $\tilde{\ell}$ к случайной величине T. Тогда

$$P(\,|T| < t_\beta\,) = \beta,$$

где

$$t_\beta = \frac{\varepsilon}{\frac{m}{\sqrt{n}}}.$$

Очевидно,

$$P(\,|T| < t_\beta) = \int_{-t_\beta}^{t_\beta} S_{n-1}(t)\,dt,$$

или

$$\int_{-t_\beta}^{t_\beta} S_{n-1}(t)dt = \beta.$$

По этой формуле составлена табл. 1, в которой по заданным значениям β и $n-1$ можно определить t_β. Тогда

$$\varepsilon = t_\beta \frac{m}{\sqrt{n}},$$

а доверительный интервал будет

$$\left(\tilde{\ell} - \varepsilon; \tilde{\ell} + \varepsilon\right).$$

Таблица 1

Значения t_β в зависимости от β и (n-1)

β / n-1	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
1	6,31	12,71	31,8	63,7	63,7
2	2,92	4,30	6,96	9,92	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	12,94
4	2,13	2,77	3,75	4,60	8,61
5	2,02	2,57	3,36	4,03	6,86
6	1,943	2,45	3,14	3,71	5,96
7	1,895	2,36	3,00	3,50	5,40
8	1,860	2,31	2,90	3,36	5,04
9	1,833	2,26	2,82	3,25	4,78
10	1,812	2,23	2,76	3,17	4,59
11	1,796	2,20	2,72	3,11	4,49
12	1,782	2,18	2,68	3,06	4,32
13	1,771	2,16	2,65	3,01	4,22
14	1,761	2,14	2,62	2,98	4,14
15	1,753	2,13	2,60	2,95	4,07
16	1,746	2,12	2,58	2,92	4,02
17	1,740	2,11	2,57	2,90	3,96
18	1,734	2,10	2,55	2,88	3,92
19	1,729	2,09	2,54	2,86	3,88
20	1,725	2,09	2,53	2,84	3,85

Пример: Продолжим обработку рассмотренного выше примера определения поля зрения зрительной трубы теодолита Т30.

Построим доверительный интервал для математического ожидания.

Вычисления выполняются в следующем порядке.

1. Из табл. 1 на стр. 28 выписывают среднее арифметическое значение $\tilde{\ell}' = 2^0 01{,}1'$ и величину $n-1 = 7$.
2. Задаются значением $\beta = 0{,}95$.
3. По табл. 1 определяют величину $t_\beta = 2{,}36$
4. Вычисляют: $\varepsilon = t_\beta \cdot m_{\tilde{\ell}} = 2{,}36 \cdot 0{,}29 = 0{,}68'$.
5. Строят доверительный интервал для математического ожидания

$$\left(\tilde{\ell} - \varepsilon; \tilde{\ell} + \varepsilon\right),$$

конкретно

$$(2^\circ 00{,}4'; 2^\circ 01{,}8')$$

Найденный случайный интервал накрывает неизвестное нам значение поля зрения трубы теодолита Т30, причем при повторении опытов это будет происходить в 95 случаях из 100, т.е. только в пяти случаях из 100 опытов полученный интервал не будет накрывать неизвестное нам значение поля зрения трубы теодолита Т30.

Таким образом, мы не знаем, чему равно истинное значение поля зрения трубы теодолита Т30, но мы можем утверждать, что с вероятностью 0,95 оно находится в интервале от $2^\circ 00{,}4'$ до $2^\circ 01{,}8'$.

3. Доверительный интервал для дисперсии (квадрата стандарта)

При тех же условиях построим доверительный интервал для дисперсии (квадрата стандарта). Здесь:

$$\tilde{c} = m^2, \qquad c = \overline{m}^2.$$

В качестве статистики, закон распределения которой не зависит от оцениваемого параметра, выступает случайная величина

$$Z = \frac{(n-1)m^2}{\overline{m}^2},$$

имеющая χ^2 – распределение с (n-1) степенями свободы. Плотность распределения случайной величины Z имеет вид

$$k_{n-1}(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{n-1}{2}} \cdot \Gamma\left(\dfrac{n-1}{2}\right)} \cdot z^{\frac{n-1}{2}-1} \cdot e^{-\frac{z}{2}} & \text{при } z > 0 \\ 0 & \text{при } z \le 0 \end{cases}$$

Кривая плотности распределения случайной величины Z не симметрична (рис. 2). Поэтому доверительный интервал выбирают так, чтобы вероятности выхода случайной величины Z за его пределы (заштрихованная площадь на рис. 2) были одинаковыми и равны

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\beta}{2}.$$

На основании закона распределения случайной величины Z построена таблица 2, пользуясь которой по заданному значению вероятности p при r степенях свободы находим такие значения χ^2, что $P(Z > \chi^2) = p$. В данном случае надо положить $r = n-1$ и найти два значения: χ^2_1 и χ^2_2 (см. рис. 2) – соответственно при

$$p_1 = \frac{\alpha}{2} \quad \text{и} \quad p_2 = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

При этом, конечно,

$$P(Z > \chi^2_1) = p_1 \quad \text{и} \quad P(Z > \chi^2_2) = p_2,$$

а

$$P(\chi^2_2 < Z < \chi^2_1) = \beta.$$

Последнее равенство эквивалентно такому равенству:

$$P\left(\frac{(n-1)\cdot m^2}{\chi^2_1} \langle \overline{m}^2 \langle \frac{(n-1)\cdot m^2}{\chi^2_2}\right) = \beta.$$

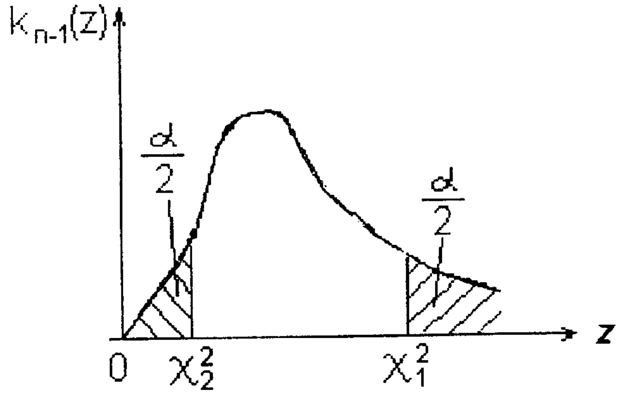

Рис. 2. Плотность χ^2 – распределения с (n-1) степенями свободы

Следовательно, искомый доверительный интервал будет

$$\left(\frac{(n-1)\cdot m^2}{\chi^2_1}; \frac{(n-1)\cdot m^2}{\chi^2_2}\right).$$

Отсюда можно построить приближенный доверительный интервал для стандарта $\overline{m}$ в виде

$$\left(\sqrt{\frac{(n-1)\cdot m^2}{\chi^2_1}}; \sqrt{\frac{(n-1)\cdot m^2}{\chi^2_2}}\right).$$

Таблица 2

Значение χ^2 в зависимости от r и p

p / r	0.99	0.98	0.95	0.90	0.10	0.05	0.02	0.01	0.001
1	0.000	0.001	0.004	0.016	2.71	3.84	5.41	6.64	10.83
2	0.020	0.040	0.103	0.211	4.60	5.99	7.82	9.21	13.82
3	0.115	0.185	0.352	0.584	6.25	7.82	9.84	11.34	16.27
4	0.297	0.429	0.711	1.064	7.78	9.49	11.67	13.28	18.46
5	0.554	0.752	1.145	1.610	9.24	11.07	13.39	15.09	20.5
6	0.872	1.134	1.635	2.20	10.64	12.59	15.03	16.81	22.5
7	1.239	1.564	2.17	2.83	12.02	14.07	16.62	18.48	24.3
8	1.646	2.03	2.73	3.49	13.36	15.51	18.17	20.1	26.1
9	2.09	2.53	3.32	4.17	14.68	16.92	19.68	21.7	27.9
10	2.56	3.06	3.94	4.86	15.99	18.31	21.2	23.2	29.6
11	3.05	3.61	4.58	5.58	17.28	19.68	22.6	24.7	31.3
12	3.57	4.18	5.23	6.30	18.55	21.0	24.1	26.2	32.9
13	4.11	4.76	5.89	7.04	19.81	22.4	25.5	27.7	34.6
14	4.46	5.37	6.57	7.79	21.1	23.7	26.9	29.1	36.1
15	5.23	5.98	7.26	8.55	22.3	25.0	28.3	30.6	37.7
16	5.81	6.61	7.96	9.31	23.5	26.3	29.6	32.0	39.3
17	6.41	7.26	8.67	10.08	24.8	27.6	31.0	33.4	40.8
18	7.02	7.91	9.39	10.86	26.0	28.9	32.3	34.8	42.3
19	7.63	8.57	10.11	11.65	27.2	30.1	33.7	36.2	43.8
20	8.26	9.24	10.85	12.44	28.4	31.4	35.0	37.6	45.3

Пример. Продолжим обработку рассмотренного выше примера определения поля зрения зрительной трубы теодолита Т30. Построим доверительный интервал для дисперсии (квадрата стандарта).

Вычисления выполняют в следующем порядке:

1. Получают эмпирическую дисперсию

$$m^2 = (0.8)^2 = 0.64$$

2. Задаются значением β = 0,9.
3. Вычисляют величину $\frac{\alpha}{2} = 0{,}05$ и вероятности

$$p_1 = \frac{\alpha}{2} = 0.05 \text{ и } p_2 = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.95$$

4. Из табл.1 на стр. 28 выписывают величину n-1=7 и принимают r = n-1=7.
5. По значениям r и p из табл.2 находят χ^2_1=14,07 и χ^2_2 = 2,17 .
6. Строят доверительный интервал для дисперсии

$$\left(\frac{(n-1)\cdot m^2}{\chi_1^2}; \frac{(n-1)\cdot m^2}{\chi_2^2} \right),$$

конкретно

(0,32´;2,1´)

Дисперсия, как и стандарт, характеризует точность результатов измерений, но она нам неизвестна. Единственно, что мы можем утверждать, так это то, что случайный интервал (0,32´;2,1´) накрывает неизвестное нам значение дисперсии. Если продолжать опыты по определению поля зрения зрительной трубы теодолит Т30, можно констатировать что в 90 случаях из 100 этот интервал будет накрывать неизвестное значение дисперсии.

Иными словами, можно утверждать, что с вероятностью 0,9 неизвестное значение дисперсии находиться в интервале от 0,32´ до 2,1´.

7. Строят приближенный доверительный интервал для стандарта

$$\left(\sqrt{\frac{(n-1)\cdot m^2}{\chi_1^2}}; \sqrt{\frac{(n-1)\cdot m^2}{\chi_2^2}} \right),$$

конкретно

(0,6´;1,4´)

Аналогичные выводы можно сделать относительно приближенного доверительного интервала для стандарта. А именно с вероятность 0,9 неизвестное значение стандарта находиться в интервале от 0,6´ до 1,4´.

СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ ЕДИНИЦАМИ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

1.Общие сведения

Физическая величина – это свойство, общее в качественном отношении для многих физических объектов, но в количественном отношении индивидуальное для каждого объекта. Пример: длина, масса, площадь.

Размер физической величины – это качественное содержание общего свойства в объекте.

Значение физической величины – это оценка ее размера.

Единица физической величины – это размер физической величины, которому по определению присвоено числовое значение 1.

Разнородные физические величины объединяются в системы. В настоящее время действует Международная система единиц СИ. Известны соотношения между важнейшими единицами прежних систем физических величин и соответствующими единицами системы СИ, а также соотношения между неметрическими и внесистемными единицами и единицами СИ.

Можно найти соотношение между единицами физических величин в разных системах. В общем виде, для получения по исходному значению физической величины в одной системе эквивалентного значения этой же физической величины в другой системе надо исходное значение умножить на переходный коэффициент k, т.е. $b=a\cdot k$

2.Расчет переводного коэффициента

Лабораторная работа предусматривает практическое (в опыте) нахождение переводного коэффициента k для различных физических величин.

Рассмотрим задачу нахождения k на примере соотношения: дюйм-сантиметр.

Эту задачу можно решить двумя способами. В первом случае надо использовать рулетку, отградуированную с одной стороны в дюймах, а с
другой – в сантиметрах. Тогда выбирают ряд объектов и измеряют их длину: в дюймах (b) и в сантиметрах (a). Измерения заносят в таблицу.

По формуле

$$k=\frac{b}{a}$$

вычисляют переводной коэффициент. Из всех значений k_i берут среднее арифметическое

$$k_{cp}=\frac{\sum_{i=1}^{n}k_i}{n}.$$

Его можно сравнить с известным значением.

Таблица

Нахождение переводного коэффициента
дюйм-сантиметр

№ п/п	Физические величины	Измерения		k
		в дюймах	в сантиметрах	
1	Длина тетради	50,30	20,20	2,49
2	Длина книги	50,62	20,25	2,50
3	Длина стола			
4	Длина безымянного пальца	22,25	8,90	2,50
5	Длина карандаша	35,61	14,30	2,49

$K_{cp}=2.495$

Во втором способе по определению за дюйм принимаем ширину большого пальца. Эта мера используется при измерениях. Методика работы такая же как и при наличии рулетки.

Часть студентов может найти соотношение: фунт – сантиметр, пядь – сантиметр.

Содержание

Учебно-методическое издание

Валентин Дмитриевич Власов
Юлий Васильевич Визиров

Метрология

Методические указания к лабораторным работам для студетов специальности 290900

Подписано к печати Формат 60×84 1/10
Усл. печ-л. Тираж 200
Изд. №: Заказ Цена

127994, Москва, ул. Образцова, 15.
Типография МИИТ