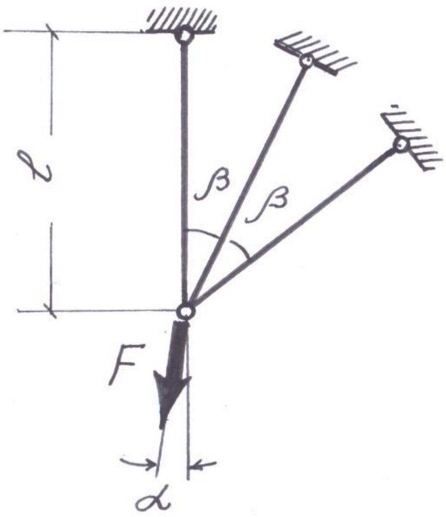
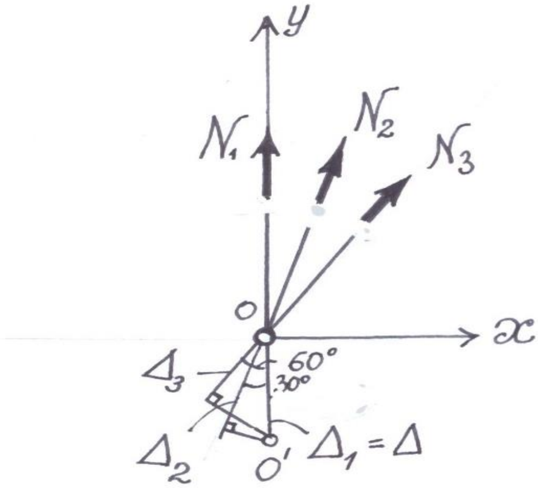
Задача 1



Система, состоящая из трех одинаковых стержней с равными параметрами ***l, A, E,*** загружена наклонной силой ***F***. При каком угле наклона силы α (см. рис.) точка приложения силы будет смещаться по вертикали? Угол $\beta = 30^0$.

Решение.



По условию задачи точка **о** (точка приложения силы) опускается вертикально вниз, занимая положение $\text{o}^{/}$(см рис.). Отрезок $\text{o} - \text{o}^{/}$есть удлинение первого стержня, обозначим его Δ. Удлинение второго стержня равно $\Delta_2 = \Delta cos30^o$=$\Delta\frac{\sqrt{3}}{2}$. Удлинение третьего стержня равно $\Delta_2 = \Delta cos60^o$ $= \Delta\frac{1}{2}$. Поскольку стержни все полностью одинаковые по своим характеристикам, продольные силы в них будут пропорциональны их удлинениям. Обозначив продольную силу в первом стержне N_1, для второго стержня будем иметь $N_2 = N_1\frac{\sqrt{3}}{2}$. Усилие в третьем стержне соответственно будет равно $N_3 = N_1\frac{1}{2}$. Спроектировав теперь все силы, действующие на точку О на оси $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{x}$, будем иметь:

$$N_1 + N_2\frac{\sqrt{3}}{2} + N_3\frac{1}{2} - F\cos\alpha = 0$$

$$N_2\frac{1}{2} + N_3\frac{\sqrt{3}}{2} - F\sin\alpha = 0$$

Подставив теперь в последние равенства вместо N_2 и N_3 их выражения через N_1 и перенеся члены, содержащие силу F в правые части равенств, получим:

$$N_1 + N_1\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + N_1\frac{1}{2}\frac{1}{2} = F\cos\alpha$$

$$N_1\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2} + N_1\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = F\sin\alpha$$

Разделив теперь второе уравнение на первое, после сокращений получим:

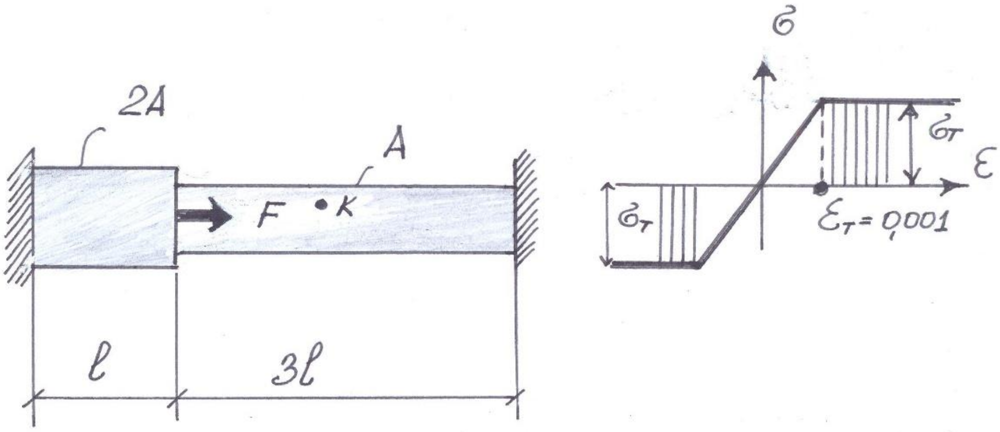
$$\frac{\sqrt{3}}{4} = tg\alpha. \quad \text{Откуда} \quad \alpha = arctg\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Определяя α с использованием калькулятора, получим: $\alpha = 23{,}41^{\circ}$ или, используя минуты, $\alpha = 23^{\circ}25^{/}$.

Ответ: $\boldsymbol{tg\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ **= 0,433.** Угол $\boldsymbol{\alpha = 23{,}41^{\circ}}$ или $\boldsymbol{\alpha = 23^{\circ}25^{/}}$.

Задача 2

Материал стержня подчиняется диаграмме Прандтля, приведенной на рисунке. Модуль упругости материала стержня $\boldsymbol{E}$. Поперечное сечение левого участка имеет площадь $\boldsymbol{2A}$, правого $\boldsymbol{A}$. После приложения силы $\boldsymbol{F}$ в точке $\boldsymbol{\kappa}$ была замеряна относительная деформация $\boldsymbol{\varepsilon_\text{к} = -0,0005}$. Определить величину силы $\boldsymbol{F}$, считая справедливой гипотезу плоских сечений.



Решение.

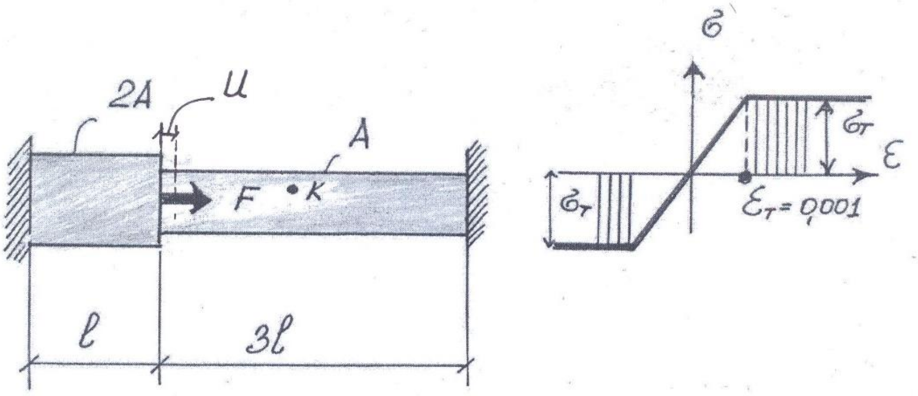


Рис.1.

Участок стержня, расположенный правее силы, испытывает постоянное по длине сжатие, причем материал здесь работает как упругий, поскольку относительная деформация здесь равна $\varepsilon_\text{к} = 0{,}0005$. Она в два раза меньше, чем деформация, при которой начинается текучесть материала (см. диаграмму). Напряжение для правого участка стержня можно определить по закону Гука.

$\sigma_{\text{правое}} = E\varepsilon_{\text{к}} = E\cdot(-0{,}0005) = -E(0{,}5\varepsilon_T) = -0{,}5\sigma_T$.

Заметим также, что относительная деформация для правого участка стержня может быть выражена через перемещение u сечения стержня, в котором приложена сила, т.е.:

$$\varepsilon_{\text{правое}} = \frac{u}{3l}\,.$$

Аналогично можно определить относительную деформацию удлинения для левого участка стержня:

$$\varepsilon_{\text{левое}} = \frac{u}{l}\,.$$

Видим, что левый участок испытывает продольную деформацию в три раза большую, чем правый участок. Относительная деформация левого участка равна $\varepsilon_{\text{правое}} = 3\varepsilon_{\text{к}} = 3\cdot 0{,}0005 = 0{,}0015$. Таким образом, левый участок работает в пластической стадии, нормальное напряжение в нем равно $\sigma_{\text{т}}$.

Для определения величины силы ***F*** вырежем двумя сечениями часть стержня с силой ***F*** (рис.2).

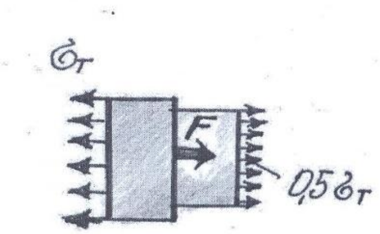


Рис.2.

Проектируя все силы на горизонтальную ось, получим:

$$-\sigma_{\text{Т}}\cdot 2\text{A} - 0{,}5\sigma_{\text{Т}}\text{A} + F = 0$$

Откуда:

$$F = 2.5\sigma_T A.$$

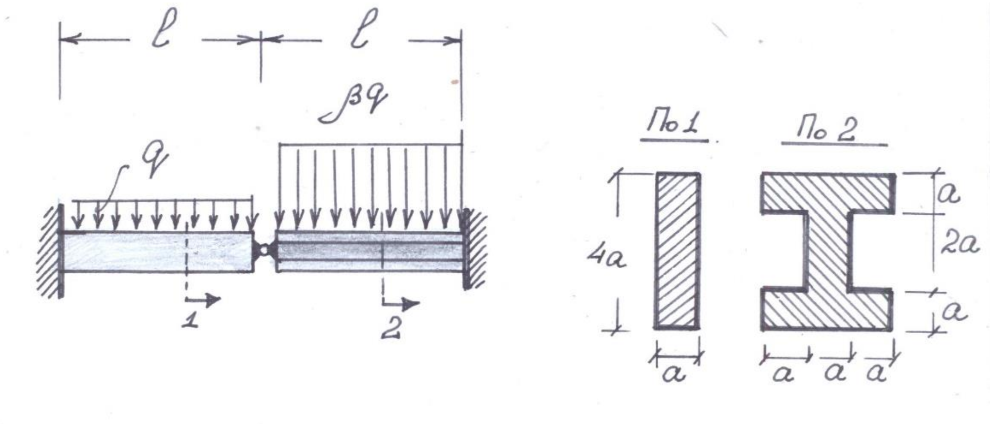
Ответ:

$$F = 2.5\sigma_T A$$

Мелешонков Е.И. Зылев В.Б.

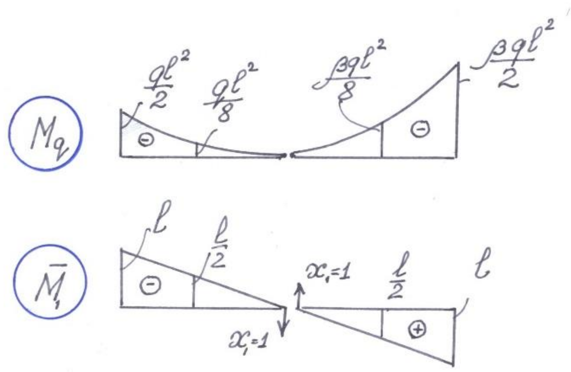
Задача 3

Правая и левая балки сделаны из одного материала, имеют одинаковую высоту но разные поперечные сечения. Какое значение должен принять коэффициент β, чтобы максимальные нормальные напряжения от изгиба в той и другой балке были бы одинаковыми.



Решение.

Коэффициент β нужно будет принять равным отношению моментов инерции правой и левой балки $\beta = \frac{I_{прав}}{I_{лев}}$. Покажем это. Задача является статически неопределимой. Сделав сечение по шарниру, построим грузовую и единичную эпюры (см. рис.).



Составим уравнение деформаций $\delta_{11}x_1 + \Delta_{1q} = 0$ (1). Грузовое перемещение определим по формуле Максвелла-Мора сопрягая эпюры M_q и M_1 . Для вычисления определенных интегралов применим формулу Симпсона.

$$\Delta_{1q}=\frac{l}{6EI_{лев}}\left(\frac{ql^2}{2}l+4\frac{ql^2}{8}\frac{l}{2}\right) - \frac{l}{6EI_{прав}}\left(\frac{\beta ql^2}{2}l+4\frac{\beta ql^2}{8}\frac{l}{2}\right) = \frac{1}{8}\frac{ql^4}{E}\left(\frac{1}{I_{лев}}-\frac{\beta}{I_{прав}}\right).$$

Последнее выражение равно нулю, когда $\beta = \frac{I_{прав}}{I_{лев}}$. Поскольку $\Delta_{1q} = 0$, то и неизвестное $x_1 = 0$ $\left(\text{см. уравнение } (1)\right)$. Таким образом, окончательной эпюрой является в данном случае эпюра M_q .

Вычисляя теперь максимальные изгибные напряжения в левой и правой балке, будем иметь.

$$\sigma^{\text{лев}} = \frac{M_{\text{лев}}}{I_{\text{лев}}} 2a = \frac{ql^2}{2} \frac{2a}{I_{\text{лев}}}$$

$$\sigma^{\text{прав}} = \frac{M_{\text{прав}}}{I_{\text{прав}}} 2a = \frac{\beta q l^2}{2} \frac{2a}{\beta I_{\text{лев}}} = \frac{ql^2}{2} \frac{2a}{I_{\text{лев}}},$$

т.е. напряжения в левой и правой балке оказались равными, что соответствует условию задачи. Теперь определим конкретное значение коэффициента β для нашего случая.

$$\beta = \frac{I_{\text{прав}}}{I_{\text{лев}}} = \frac{\frac{a(4a)^3}{12} + \left[\ \frac{a^4}{12} + a^2(1{,}5a)^2\ \right]4}{\frac{a(4a)^3}{12}} = \frac{11}{4} = 2{,}75$$

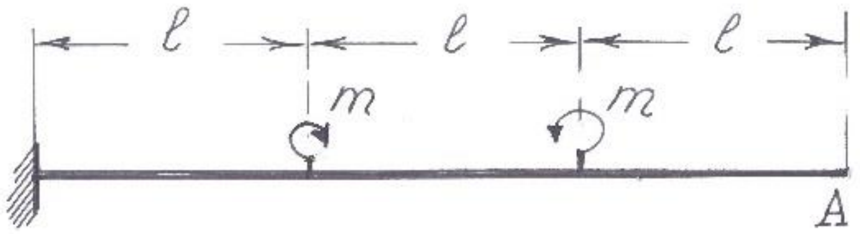
.

Ответ: $\beta = \frac{11}{4} = 2{,}75$

Зылев В.Б.

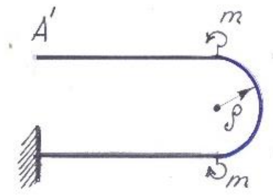
<u>Задача 4</u>

Весьма гибкая тонкая стальная линейка загружена двумя сосредоточенными моментами. Известна изгибная жесткость линейки EI. Какой величины нужно взять моменты m, чтобы перемещение точки A по горизонтали составило $3l$. Работу балки считать линейно упругой а перемещения большими.



Решение.

Первый и третий участок балки не испытывают изгибающего момента, следовательно, они остаются прямыми. Средний участок балки испытывает чистый изгиб, поэтому изгибается по окружности. Вид деформированной балки показан на рисунке.



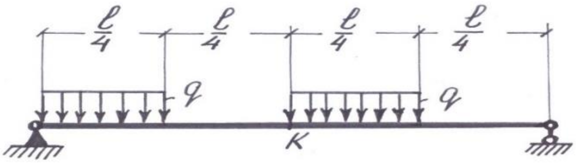
В соответствии с рисунком, угол поворота, накопившийся на среднем участке, выраженный в радианах, равен π. Таким образом будем иметь:

$\frac{l}{\rho} = \pi \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\rho} = \frac{\pi}{l}$. Зная кривизну $\frac{1}{\rho}$, по известной из теории изгиба формуле определяем момент $m = \frac{1}{\rho} EI = \frac{\pi EI}{l}$.

Ответ: $\boldsymbol{m = \frac{\pi EI}{l}}$.

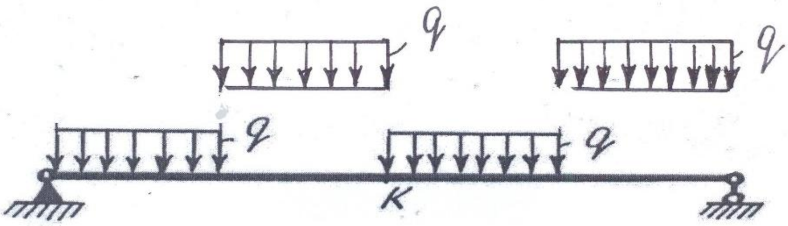
В.Б. Зылев

Задача 5



После приложения нагрузки был определен прогиб в середине балки $\Delta_к$. Для балки известна изгибная жесткость ***EJ.*** Найти величину приложенной нагрузки $\boldsymbol{q}$.

Решение.



Прежде всего необходимо решить задачу о прогибе в точке $\boldsymbol{\kappa}$ при заданной схеме приложения нагрузки. Чтобы упростить решение этой задачи, добавим к заданной нагрузке подобную нагрузку, которая показана на схеме, сдвинутой вверх. Очевидно, что прогиб от добавленной нагрузки в середине балки будет точно таким же, как и прогиб от заданной нагрузки. Пользуясь принципом независимости действия сил придем к выводу, что прогиб в середине балки от одновременного действия двух загружений будет $2\Delta_к$. Суммарное загружение теперь представляется в виде равномерно распределенной нагрузки. Это загружение является стандартным и для прогиба в середине балки известна готовая формула $\frac{5}{384}\frac{ql^4}{EI}$. Применительно к нашей задаче будем иметь: $2\Delta_к = \frac{5}{384}\frac{ql^4}{EI}$.

Из последней формулы получаем нагрузку: $q = \frac{\Delta_к 768\, EJ}{5l^4}$.

Ответ:

$$\boldsymbol{q = \frac{\Delta_к 768\, EJ}{5l^4} = 153.6\,\frac{\Delta_к\, EJ}{l^4}}\ .$$