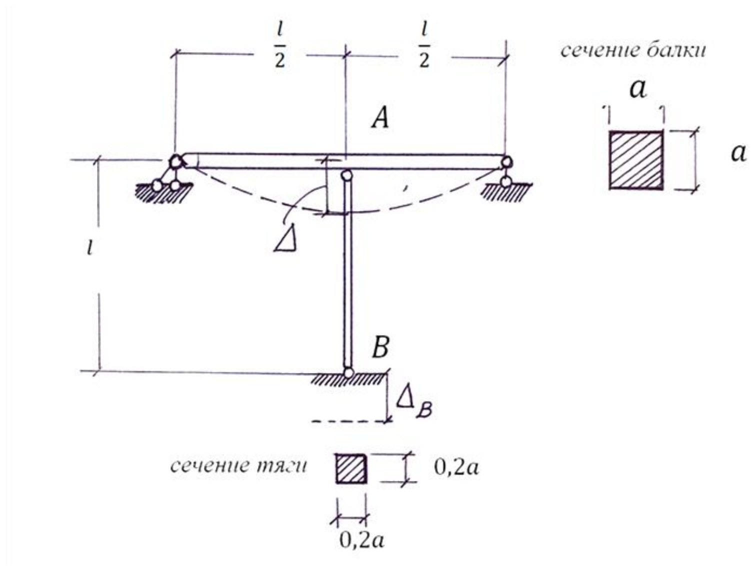
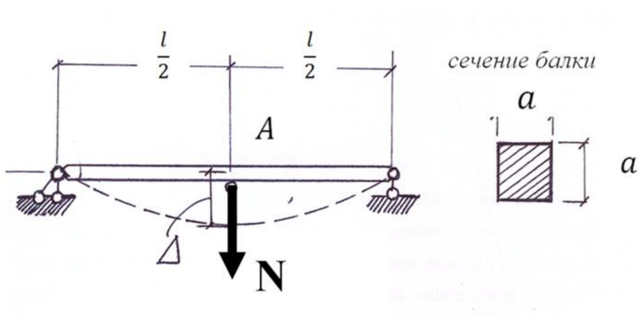
Задача 1



Какую осадку должна получить опора B по вертикали, чтобы точка A опустилась на величину Δ. Балка и тяга изготовлены из одинакового материала с модулем упругости E. Размер $l = 10a$.

Решение.

После осадки на балку со стороны стержня будет действовать сила N, равная продольной силе в тяге.



Определив от этой силы прогиб в центре балки (например по методу Максвелла-Мора) получим:

$$\Delta = \frac{Nl^3}{48EI} \quad , \quad \text{откуда} \quad N = \Delta\frac{48EI}{l^3}. \qquad (1)$$

Опускание точки ***B*** равно опусканию точки ***A***, плюс удлинение тяги ***AB***. Таким образом получим:

$$\Delta_B = \Delta + \frac{Nl}{EA_т}.$$

Подставляя в последнюю формулу силу N из (1), получим:

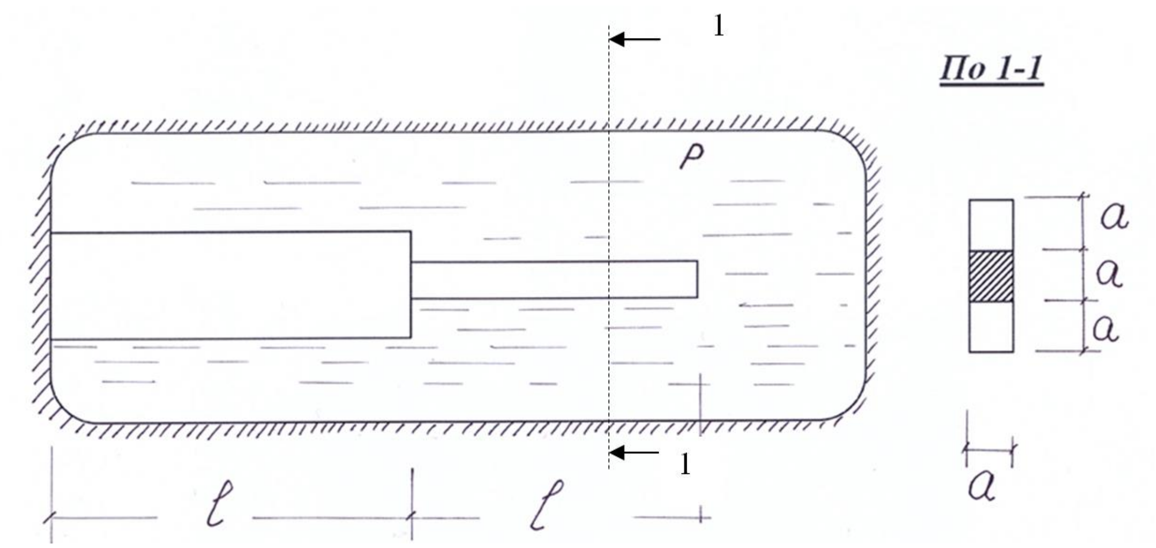
$$\Delta_B = \Delta + \frac{\Delta\frac{48EI}{l^3}l}{EA_т} = \Delta + \frac{\Delta\frac{48E\frac{a^4}{12}}{l^3}l}{E(0{,}2a)^2} = \Delta + \Delta 100\frac{a^2}{l^2} = 2\Delta$$

(напомним что $\frac{l}{a} = 10$). **<u>Ответ:</u>** опора B должна получить осадку $\mathbf{2\Delta}$.

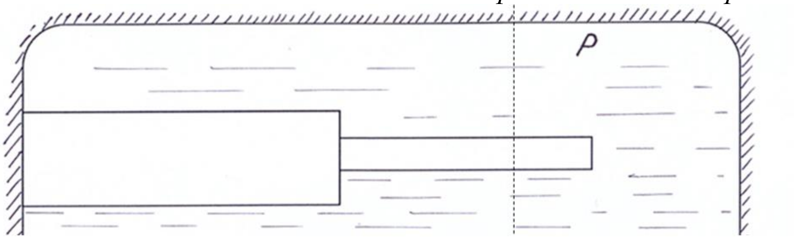
Задача 2.

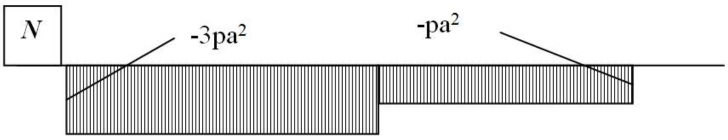
Упругий стержень помещен в замкнутый, жесткий, закрепленный сосуд, заполненный жидкостью. Жидкость окружает стержень со всех сторон. Стержень сделан из изотропного упругого материала с модулем упругости E и коэффициентом Пуассона $\mu = 0{,}25$. Давление жидкости повышается до весьма большого значения p.

Построить эпюру продольных сил в стержне и определить перемещение его торцевого сечения по горизонтали. Собственным весом жидкости и стержня пренебречь.



Напряжения в стержне будут повторять напряжения в жидкости, т.е. его материал будет испытывать всестороннее сжатие $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$. Зная, что продольная сила равняется напряжению, умноженному на площадь, легко строим эпюру продольных сил:





Для определения перемещения найдем сначала относительную деформацию в материале стержня с использованием обобщенного закона Гука.

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu\frac{\sigma_y}{E} - \mu\frac{\sigma_z}{E} = \frac{-p}{E} - \mu\frac{-p}{E} - \mu\frac{-p}{E} = \frac{-p}{E}(1 - 2\mu)\ .$$

Деформация будет одинаковая во всех направлениях и во всех точках стержня. Чтобы определить изменение длины стержня нужно умножить относительную деформацию на его исходную длину. Поскольку левое сечение стержня закреплено, изменение его длины и будет искомым перемещением.

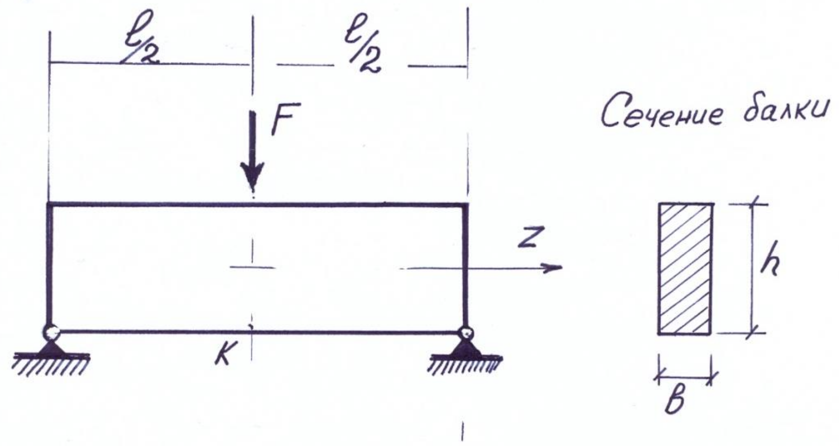
$$u = \Delta l = \varepsilon_z \cdot 2l = \frac{-p}{E}(1 - 2\mu)2l.$$

Подставив сюда заданное значение коэффициента Пуассона $\mu = 0{,}25$, окончательно получим:

$u = \Delta l = \frac{-p}{E}l.$ Знак минус указывает на то, что стержень укорачивается и соответственно торцевое сечение перемещается налево.

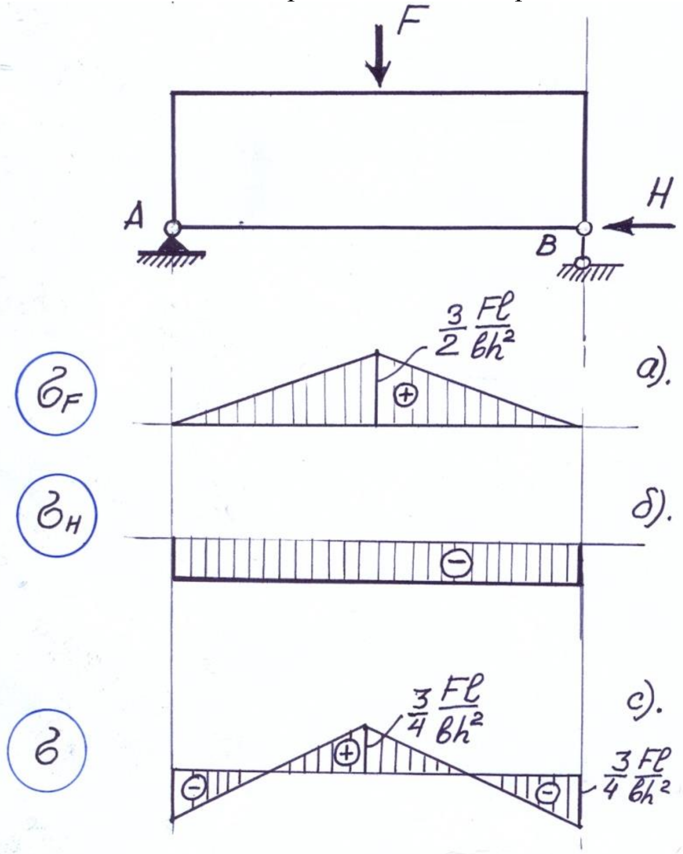
<u>Ответ:</u> $\boldsymbol{u = \frac{-p}{E}l}$

Задача 3



Балка имеет две шарнирно **неподвижные** опоры. Найти напряжение σ_Z в точке ***К*** нижнего волокна балки.

Решение.



Задача является статически неопределимой (см. рис.). Можно представить, что напряжения возникают от силы F и от пока неизвестной нам горизонтальной опорной реакции H. Определим сначала напряжение в нижнем волокне от силы F. Эта задача вполне обычная. В сечении под силой напряжение в нижнем волокне определится по формуле

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{\frac{Fl}{4}}{\frac{bh^2}{6}} = \frac{3}{2}\frac{Fl}{bh^2}.$$

По длине нижнего волокна эпюра напряжений будет меняться также, как эпюра моментов. Таким образом эпюра в нижнем волокне только от силы F будет иметь вид, показанный на рис. а).

Горизонтальная опорная реакция H будет вызывать в стержне внецентренное сжатие, поэтому напряжение в нижнем волокне будет постоянным (см. рис. б)). Окончательная эпюра получится суммированием эпюр а) и б). Ординату в эпюре напряжения σ_H определим с таким расчетом, чтобы окончательная эпюра напряжения в нижнем волокне имела бы нулевую площадь. Соответствующая окончательная эпюра напряжений показана на рис. с).

Теперь обоснуем то положение, что площадь окончательной эпюры напряжений σ_Z должна быть нулевой. Для этого определим упругое удлинение нижнего волокна:

$$\Delta l_{AB} = \int_0^l \varepsilon\, dl = \int_0^l \frac{\sigma}{E} dl = \frac{1}{E}\int_0^l \sigma dl = \frac{1}{E}\Omega_\sigma = 0.$$

Полное удлинение отрезка А В мы приравняли нулю т.к. в точке В стоит шарнирно неподвижная опора. Таким образом обосновано принятое нами положение о том, что площадь окончательной эпюры напряжений в нижнем волокне $\Omega_\sigma = 0$ равна нулю. На рис. б) показана окончательная эпюра напряжений. Средняя ее ордината даст искомый ответ: $\sigma = \frac{3}{4}\frac{Fl}{bh^2}$.

Ответ: : $\boldsymbol{\sigma = \frac{3}{4}\frac{Fl}{bh^2}}$**.**

<u>Задача 4</u>

Материал стержня однородный, упругий, изотропный с модулем упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа и коэффициентом Пуассона $\mu = 0{,}3$. В некоторой точке ***k*** замерены главные деформации $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1{,}5 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_3 = -5 \cdot 10^{-4}$. Найти главные напряжения в точке ***k.*** Какой вид напряженного состояния имеет в место в этой точке.

<u>Решение.</u>

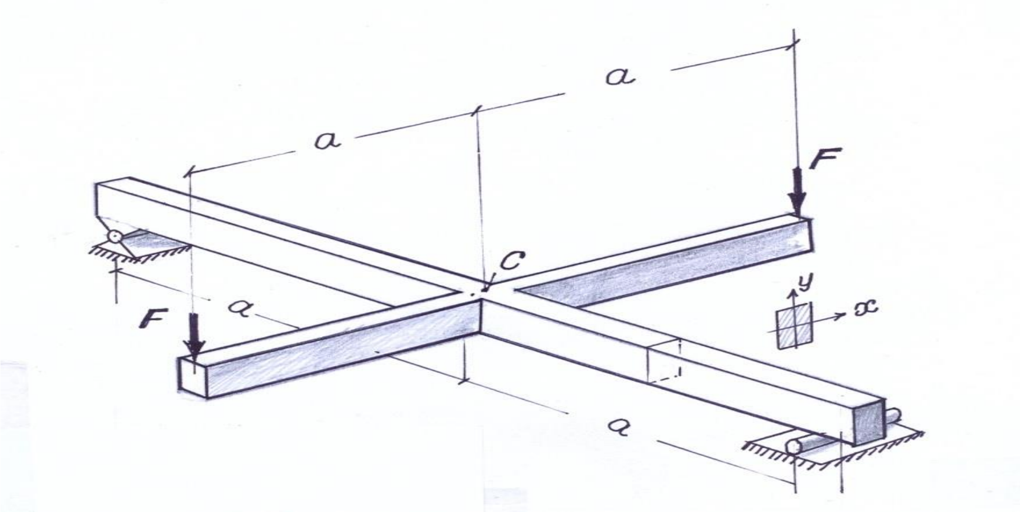
Заметим, что $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -0{,}3\varepsilon_3$ или, при значении коэффициента Пуассона $\mu = 0{,}3$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\mu\varepsilon_3$. Это отвечает случаю линейного напряженного состояния - осевому сжатию $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$;

$\sigma_3 = E \cdot \varepsilon_3$= 2· 10^5 ·(-5· 10^{-4}) $= -100$ МПа.

<u>Ответ:</u>

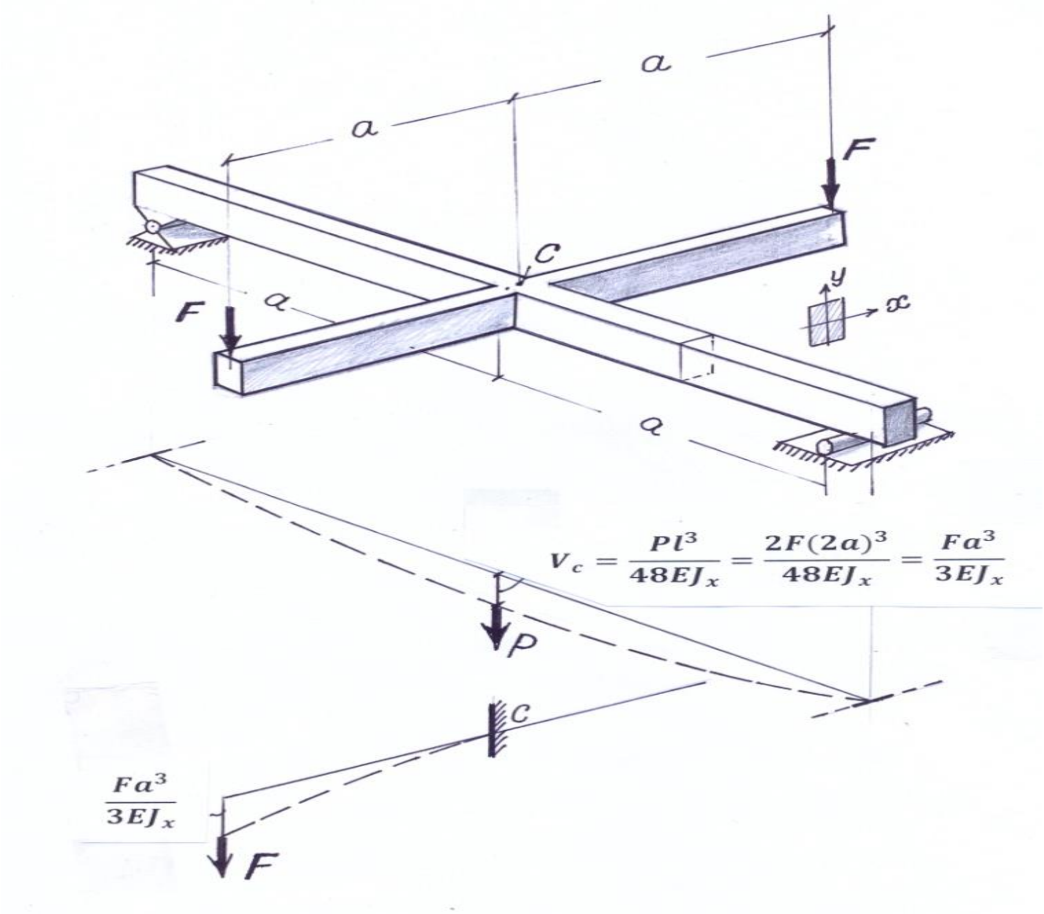
В точке k напряженное состояние - одноосное сжатие с главными напряжениями $\boldsymbol{\sigma_1 = \sigma_2 = 0}$ и $\boldsymbol{\sigma_3 = -100}$ МПа.

Задача 5



Система изготовлена из одинаковых стержней, продольные оси которых взаимно перпендикулярны. Известны $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{EJ_x}$, $\boldsymbol{F}$. Определить наибольший прогиб.

Решение.



Сначала можно найти перемещение точки **C** с использованием формулы для прогиба шарнирно опертой балки при действии сосредоточенной силы (см. рис.). Прогиб консоли, параллельной оси $\boldsymbol{x}$ относительно точки **C,** будет $\frac{Fa^3}{3EJ_x}$ (см. рис.). Сложив полученные прогибы, получим максимальный прогиб, который безусловно будет иметь место на свободных концах перекрестия $V_c + \frac{Fa^3}{3EJ_x} = \frac{Fa^3}{3EJ_x} + \frac{Fa^3}{3EJ_x} = \frac{2Fa^3}{3EJ_x}$.

<u>Ответ</u>: Максимальный вертикальный прогиб будет возникать на концах свободных консолей. Он будет равен $\boldsymbol{\frac{2Fa^3}{3EJ_x}}$.