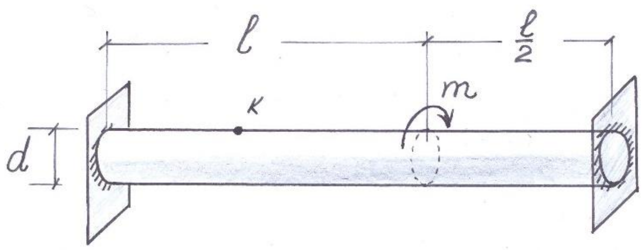
Задача 1

Стержень загружен крутящим моментом. На поверхности стержня в точке ***к*** была замерена главная деформация ε_1. Требуется определить угол поворота сечения, в котором приложен момент.



Решение.

При кручении возникает напряженное состояние чистого сдвига, $\sigma_1 = \tau$, $\sigma_2 = -\tau$, . В соответствии с обобщенным законом Гука

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \mu\frac{\sigma_2}{E} = \frac{\tau}{E} + \mu\frac{\tau}{E} = \frac{\tau}{E}(1+\mu) = \frac{\tau}{\frac{E}{2(1+\mu)}2} = \frac{\tau}{2G}.$$

Здесь использовано известное соотношение между модулем упругости при сдвиге и модулем упругости при растяжении $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$. Касательное напряжение определяется на поверхности стержня формулой $\tau = \frac{М_{кр}}{J_\rho}\frac{d}{2}$. Тогда для ε_1 получим:

$$\varepsilon_1 = \frac{М_{кр}}{J_\rho}\frac{d}{2}\frac{1}{2G} \quad \rightarrow \quad \frac{М_{кр}}{GJ_\rho} = \frac{4\varepsilon_1}{d} \quad (1).$$

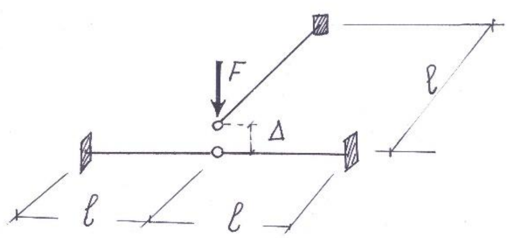
Формула для угла закручивания

$\varphi = \frac{М_{кр}}{GJ_\rho}l$. Ответ получим, подставив сюда $\frac{М_{кр}}{GJ_\rho} = \frac{4\varepsilon_1}{d}$ из (1).

$$\varphi = \frac{4\varepsilon_1}{d}l.$$

Ответ: $\varphi = \frac{4\varepsilon_1 l}{d}$.

Задача 2



Система, состоящая из трех одинаковых стержней имеет малый зазор Δ. Прикладывается сила F, которая совмещает шарниры и далее система замыкается. После замыкания системы сила удаляется. Построить окончательную эпюру изгибающих моментов в системе. Все стержни имеют одинаковое круглое поперечное сечение.

Решение.

В момент касания шарниров изгибается лишь средний стержень, соответствующая эпюра моментов показана на рис.1.

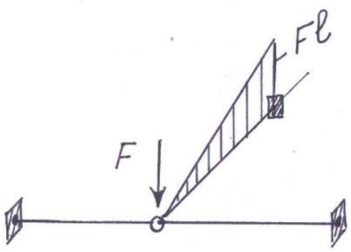


Рис.1

Удалить силу F это тоже самое, что оставить ее и еще приложить еще силу, равную F, но направленную вверх.

Решим отдельно задачу о силе, направленной вверх, приложенной к замкнутой системе. Поскольку шарнир стал общей точкой для стержней, от приложения силы их концы получат одинаковые перемещения, и следовательно, в них возникнут одинаковые моменты и одинаковые перерезывающие силы S. Вырезав центральный узел и спроектировав все силы на вертикальную ось (см. рис.2) получим:

$F - 3S = 0,$ откуда $S = \frac{F}{3}$.

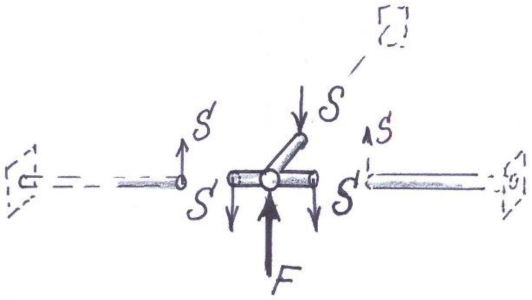


Рис.2

Эпюра моментов, которая возникает от силы F, приложенной вверх, показана на рис. 3.

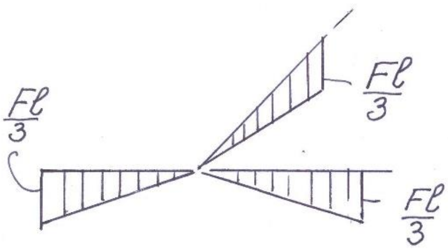
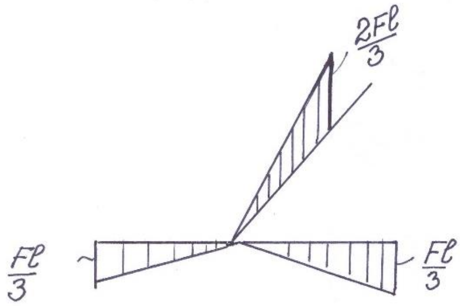
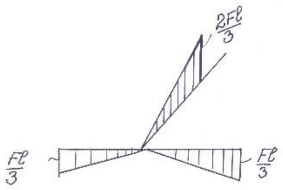


Рис. 3

Окончательную эпюру получим, складывая эпюры, показанные на рис.1 и рис. 3.

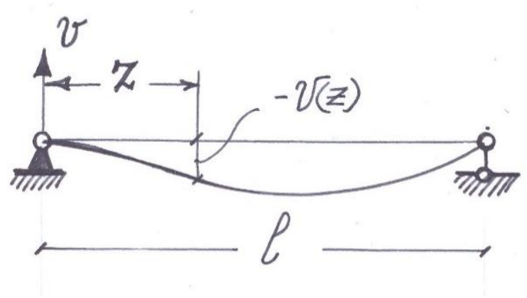


Ответ: Окончательная эпюра изгибающих моментов в системе показана на рисунке.



Задача 3

Некоторые силовые воздействия вызвали прогиб балки, заданный уравнением: $v(z) = -\frac{C}{l^2} z^2 (l - z)$, где C - константа. Изгибная жесткость балки EJ . Необходимо построить эпюры моментов и поперечных сил и определить силовые воздействия, приложенные к балке.



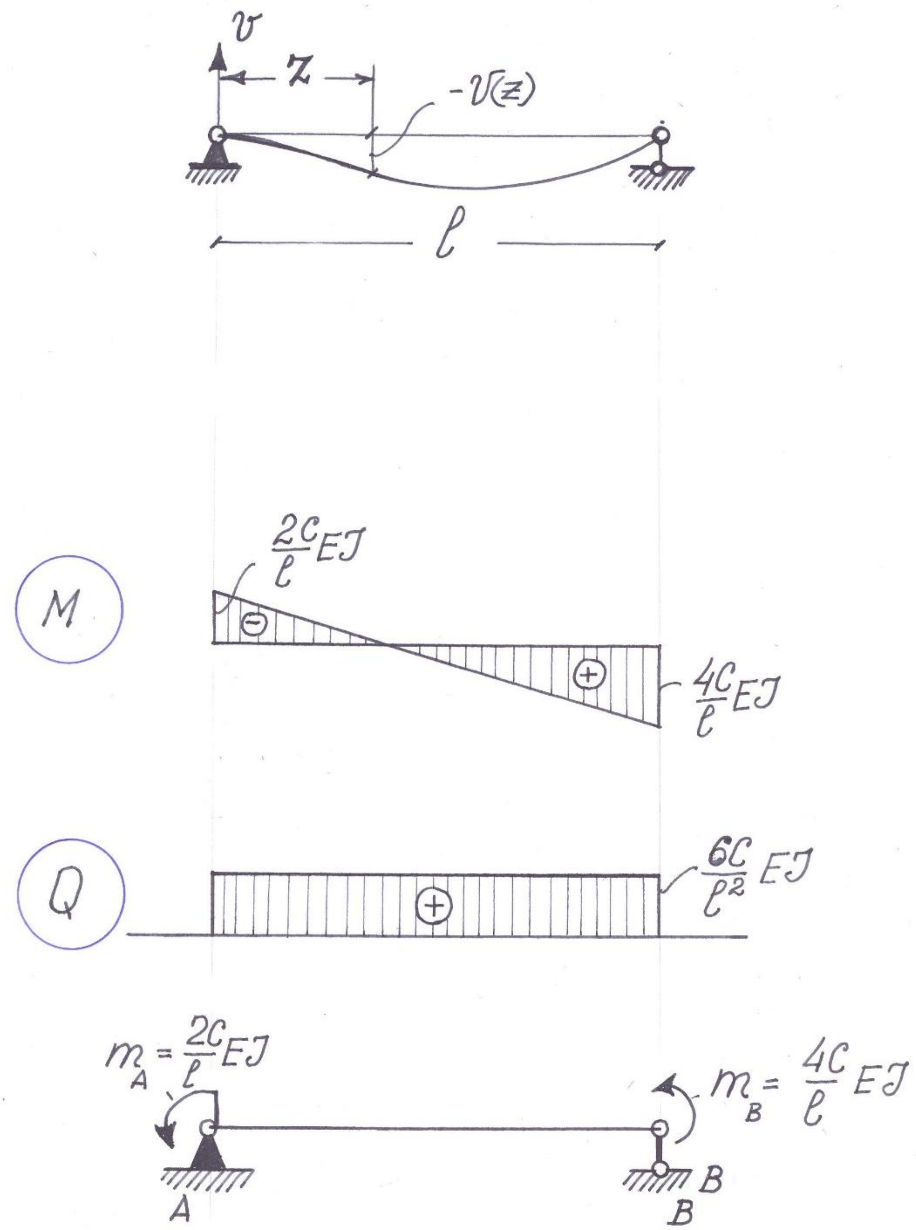
Решение.

$$M = EJ \cdot v^{//} = EJ \left[-\frac{C}{l^2} z^2 (l - z) \right]^{//} = -EJ \frac{C}{l^2} \ (2l - 6z);$$

$$Q = (M)^{/} = \left[-EJ \frac{C}{l^2} \ (2l - 6z) \right]^{/} = EJ \frac{6C}{l^2} \ .$$

Таким образом, получение эпюр сводится к дифференцированию. На рисунке показаны эпюры изгибающего момента и поперечной силы, построенные по полученным формулам. Поскольку эпюра поперечной силы оказалась постоянной, распределенная нагрузка на балке отсутствует.

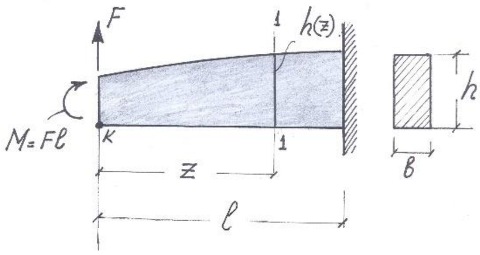
По скачкам в эпюре моментов, которые имеются в начале и конце балки, получим значения внешних сосредоточенных моментов, величины которых равны соответствующим скачкам. Скачки в эпюре Q - это реакции в опорных закреплениях балки.



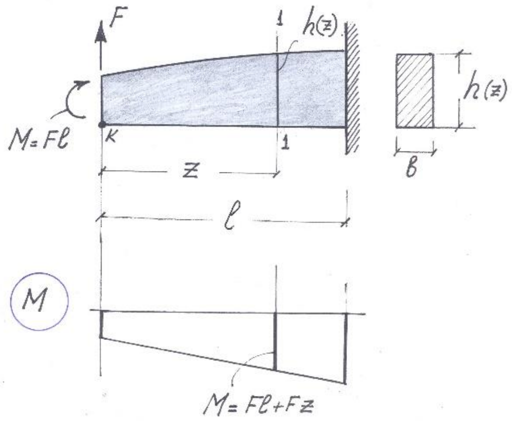
Ответы: Балка загружена двумя сосредоточенными моментами по концам $m_A = \frac{2C}{l}\,EJ$; $m_В = \frac{4C}{l}\,EJ$. Направления сосредоточенных моментов показаны на рисунке.

Задача 4

Требуется найти закон изменения высоты стержня $h(z)$ с таким расчетом, чтобы все сечения стержня были бы равнопрочными и определить горизонтальное перемещение точки к. Допускаемое напряжение при изгибе $[\sigma]$, модуль упругости материала Е. Малым наклоном продольной оси стержня можно пренебречь.



Решение.



На рисунке показана эпюра моментов от приложенной нагрузки. Запишем формулу для нормальных напряжений в крайних точках стержня:

$$[\sigma] = \frac{M}{W} = \frac{Fl+Fz}{\frac{bh(z)^2}{6}} \qquad \rightarrow \qquad h(z) = \sqrt{\frac{6(Fl+Fz)}{[\sigma]b}} \ .$$

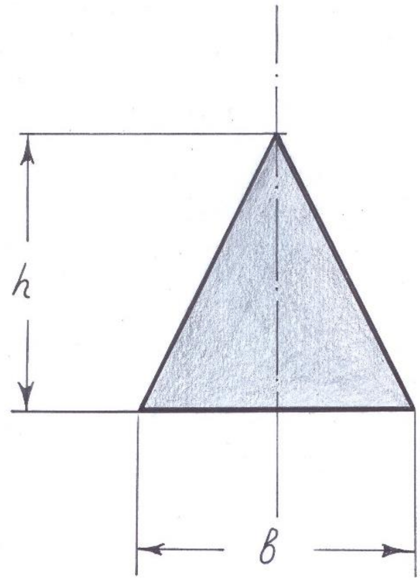
Горизонтальное перемещение точки ***к*** найдем как удлинение нижнего волокна.

$$u_k = \varepsilon l = \frac{[\sigma]}{E} l \ .$$

Ответы: $h(z) = \sqrt{\frac{6(Fl+Fz)}{[\sigma]b}}$; $\quad u_k = \frac{[\sigma]}{E} l$.

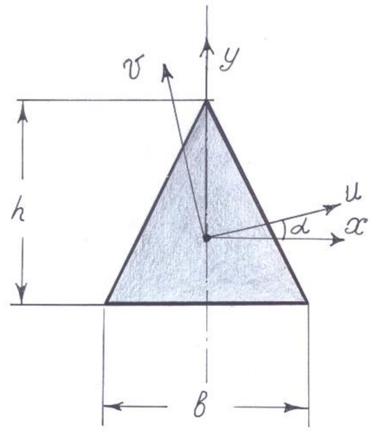
Задача 5

Поперечное сечение стержня имеет вид равнобедренного треугольника. При каком соотношении $\frac{h}{b}$ все центральные моменты инерции будут являться главными?



Решение.

Признаком главных осей является равенство нулю центробежного момента инерции, который для повернутых осей определяется формулой:



$$J_{uv} = \frac{(J_1 - J_2)}{2} sin2\alpha.$$

Соответственно для любого α он будет равен нулю, когда $J_1 = J_2$. Вертикальная и горизонтальная оси являются главными, т.к. ось y - ось симметрии сечения. Таким образом, в нашем случае одним из главных моментов инерции будет J_x а другим J_y и , следовательно, для поставленного в задаче условия необходимо выполнение равенства $J_x = J_y$.

Подставив сюда известные формулы для центральных моментов инерции равнобедренного треугольника, получим:

$$\frac{bh^3}{36} = \frac{hb^3}{48} \qquad \rightarrow \qquad \frac{h}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Заметим, что при найденном соотношении треугольник будет равносторонним, что соответствует условиям задачи.

Ответ: $\frac{h}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2}$