



**Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего профессионального образования  
«Московский государственный университет путей  
сообщения»**

---

**Кафедра строительной механики**

**А.М. ЛУКЬЯНОВ, М. А.ЛУКЬЯНОВ, А.И. МАРАСАНОВ**

**РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ  
МЕТОДОМ СИЛ**

**Методические указания  
к выполнению домашнего задания  
по дисциплине «Сопротивление материалов»**

**МОСКВА - 2015**

**Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего профессионального образования  
«Московский государственный университет путей  
сообщения»**

---

Кафедра строительная механика

А.М. Лукьянов, М. А.Лукьянов, А.И. Марасанов

## **РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СИЛ**

Рекомендовано редакционно-издательским советом  
университета в качестве методических указаний для студентов  
электромеханических специальностей

**МОСКВА - 2015**

УДК 539.3/.6: 624.071.3

Л - 155

Лукьянов А.М., Лукьянов М.А., Марасанов А.И. Расчет статически неопределимых систем методом сил: Методические указания к выполнению домашнего задания – 3-е изд. испр. - М.: МИИТ, 2015. – 44 с.: с ил.

Излагаются основные теоретические сведения из курса «Сопротивление материалов» - основы расчета простейших статически неопределимых систем. Приводятся характерные примеры с подробными решениями. Методические указания следует рассматривать как дополнение к лекциям и учебной литературе.

Методические указания предназначены для студентов транспортных специальностей.

При выполнении задания рекомендуется использовать учебники:

1. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б. П. Сопротивление материалов. - 8-е изд. испр.- М.: Студент, 2012 , - 560 с.: ил.

2. Лукьянов А.М. Сопротивление материалов. Учебное пособие для вузов ж.- д. транспорта.– М.: ФГБОУ «Учебно-методический центр по образованию на железнодорожном транспорте, 2008. – 560 с.: ил.

© МГУПС (МИИТ), 2015

## Введение

Настоящие методические указания содержат краткий обзор необходимого теоретического материала, подбор задач и рекомендации к выполнению расчетно-графического задания №4, выполняемого студентами в пятом семестре при изучении курса «Сопротивление материалов».

При составлении указаний учитывалось, что определение внутренних усилий, напряжений и построение эпюр освоено студентами ранее и закреплено в четвертом семестре при выполнении первых трех заданий. Поэтому эти важные вопросы разбираются лишь в той степени, в какой необходимо осветить специфику вновь ставящихся задач.

Цель методических указаний ориентировать студента при его самостоятельной работе над материалом дисциплины, выделив узловые вопросы, необходимые для решения задач, поставленных в домашнем задании.

### 1. Статически неопределимые балки.

Балка, способная воспринимать произвольную нагрузку, должна быть закреплена таким образом, чтобы она не могла перемещаться как жесткое тело. В случае действия нагрузки в одной плоскости минимальное количество связей, необходимых для закрепления стержневой системы, равно трем.

Простейшим примером такой системы является балка, показанная на рис. 1, а. Эти три связи являются *абсолютно необходимыми*, удаление хотя бы одной из таких связей превращает стержневую систему в *геометрически изменяемую систему* (механизм) (рис. 1, б), т.е. в такую систему, в которой могут происходить перемещения точек без деформации стержней.

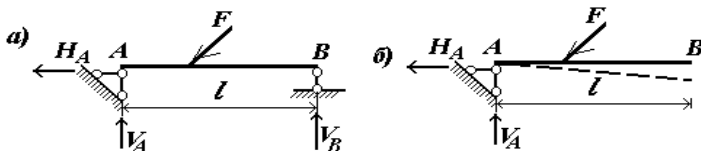


Рис. 1.

Напомним, что *связью* называется всякое препятствие, не допускающее изменения взаимного положения точек или сечений системы. *Геометрически неизменяемой* называется такая система, в которой перемещения точек или элементов возможны только за счет деформации стержней.

Поскольку для плоской системы сил можно составить три уравнения равновесия, реакции абсолютно необходимых связей могут быть найдены с помощью лишь одних уравнений статики.

Если все реакции в связях закрепления, а также внутренние усилия в элементах системы могут быть определены, исходя из уравнений равновесия, то такая система называется *статически определимой*.

В инженерной практике встречаются системы, в которых число наложенных связей (и соответственно неизвестных усилий) больше числа уравнений равновесия. Такие системы называются *статически неопределимыми*.

По сравнению со статически определимыми системами, неопределимые системы имеют дополнительные связи, которые называют *лишними*. Так, для балки, изображенной на рис. 2, а, имеем одну лишнюю связь.

Термин «лишние связи» является условным. Эти связи лишние только с той точки зрения, что число связей превышает число уравнений равновесия. В действительности указанные связи необходимы, поскольку при их отсутствии прочность или жесткость конструкции могут быть необеспеченными.

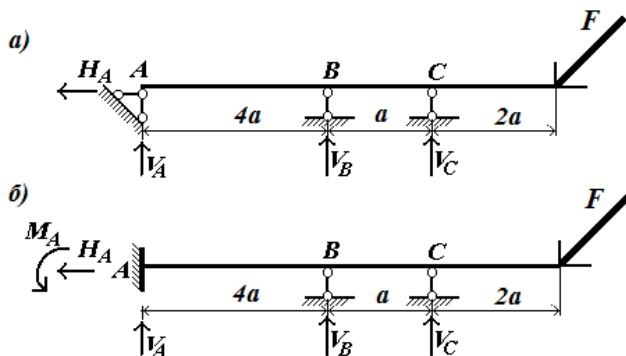


Рис. 2.

Усилия в лишних связях называются *лишними неизвестными*; их число совпадает с числом лишних связей, которое определяет степень статической неопределимости системы.

Степень статической неопределимости есть разность между числом искомых усилий и числом независимых уравнений равновесия, которые можно составить для их получения.

Рассматривая балку рис. 2, б, устанавливаем, что число неизвестных реакций равно пяти, а число уравнений равновесия для их отыскания - три. Следовательно, балка два раза (дважды) статически неопределима.

Метод расчета статически неопределимых систем, элементы которых испытывают изгиб, по существу не отличается от рассмотренных ранее методов расчета статически неопределимых систем при растяжении или кручении.

Кратко напомним сущность этого метода. Заданная статически неопределимая система превращается в статически определимую путем освобождения ее от «лишних» связей, а их действие заменяется силами или моментами  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ . При отбрасывании «лишних» связей необходимо следить за тем, чтобы новая система, полученная из заданной, была геометрически неизменяемой. Полученная таким образом статически определимая и геометрически неизменяемая система называется *основной системой*.

На рис. 3,а показана балка, имеющая степень статической неопределимости равной единице. Для получения основной системы надо удалить одну связь и ее действие заменить неизвестной силой (или моментом)  $X_1$ . На рис. 3,б основная система (ОС) получена путем удаления средней (промежуточной) опоры. В варианте, показанном на рис. 3,в, основная система получена путем удаления правой опоры. В варианте, показанном на рис. 3,г опорный шарнир врезан в балку. Пара сил  $X_1$ , показанная слева от средней опоры, изображает действие правой балки на левую, а пара  $X_1$ , показанная справа от средней опоры, изображает действие левой балки на правую. Тогда основная система представляет собой две отдельные шарнирно опертые по концам балки.

Заметим, что балки такого типа, как представленная на рис. 3, а, называются *неразрезными балками*. Они могут иметь различное число пролетов. С точки зрения упрощения вычислений основная система для неразрезной балки, полученная путем врезания шарниров над

промежуточными опорами, всегда предпочтительна по сравнению со всеми другими основными системами.

В варианте, показанном на рис. 3,д, отброшена горизонтальная связь. В результате балка оказалась подвижной. Удалена связь, которая является абсолютно необходимой, она не является «лишней». Поэтому этот вариант не может рассматриваться в качестве основной системы.

Поскольку за неизвестные в дальнейшем принимаются усилия в лишних связях, то такой метод расчета статически неопределимых систем получил название *метода сил*.

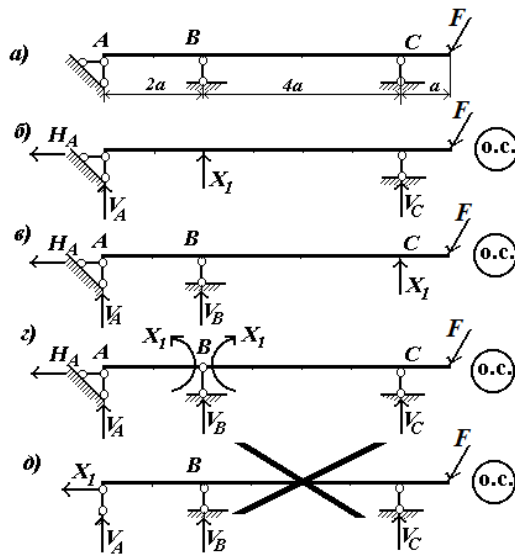


Рис. 3.

## 2. Каноническое уравнение метода сил.

Определение неизвестных усилий в статически неопределимых системах возможно, если уравнения равновесия дополнить уравнениями, характеризующими деформированное состояние системы, - *уравнениями совместности деформаций*, или их называют просто *уравнениями деформаций*. Число этих дополни-

тельных уравнений равно степени статической неопределимости.

Смысл уравнений заключается в том, что перемещения в основной системе, вызванные внешней нагрузкой и лишними неизвестными, должны быть такими же, как и в заданной системе.

Рассматривая систему, показанную на рис. 4. Как мы уже

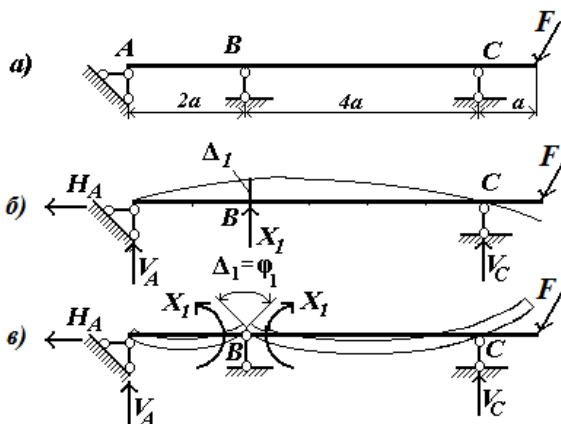


Рис. 4.

установили, она один раз статически неопределима. В основной системе, показанной на рис. 4, б, перемещение  $\Delta_1$  должно быть равно нулю, так как в заданной системе вертикальное перемещение сечения балки, находящегося на промежуточной опоре, равно нулю. Тогда можно записать:  $\Delta_1 = 0$ , это означает, что суммарное перемещение в основной системе, вызванное внешней нагрузкой и «лишним» неизвестным, по направлению самого неизвестного должно быть равно нулю.

Когда «лишним» неизвестным является изгибающий момент  $X_1$ , (рис. 4, в) над промежуточной опорой, аналогичное уравнение  $\Delta_1 = 0$ , означает, что взаимный угол раскрытия сечения над промежуточной опорой должен быть равным нулю.

Основную систему, нагруженную заданными внешними силами и реакциями отброшенных связей, иногда называют *эквивалентной системой*.

Применяя принцип независимости действия сил, можно записать уравнение перемещений в виде:

$$\Delta_1 = \Delta_{1X} + \Delta_{1P} = 0 \quad (1)$$



Первый индекс у каждого из перемещений указывает номер «лишнего» неизвестного, в направлении которого происходит данное перемещение; второй индекс указывает причину, вызывающую перемещение, например:  $\Delta_{1X}$  - перемещение в направлении  $X_1$ , вызванное действием  $X_1$ ;  $\Delta_{1P}$  - перемещение в том же направлении от действия заданной нагрузки.

Перемещение  $\Delta_{1X}$ , учитывая упругие деформации, удобно записать через единичное перемещение  $\delta_{11}$ , т.е. перемещение в направлении  $X_1$ , вызванное единичным неизвестным  $X_1$ . Вводя единичное перемещение, приходим к следующей форме уравнения перемещений (1):

$$\Delta_1 = \delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1P} = 0 \quad (2)$$

Единичное и грузовое перемещения, определяются по формуле Мора – Максвелла.

Уравнение перемещений, представленное в форме (2), носит название *канонического уравнения метода сил*. Каноническим это уравнение называют потому, что оно составлено по одному и тому же правилу (канону), и его вид зависит только от степени статической неопределимости системы и не зависит от её конкретных особенностей.

Последовательность расчета статически неопределимых балок рассмотрим на следующем примере.

**Пример 1.** Для балки (рис. 5,а) построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил, жесткость поперечного сечения считать постоянной ( $EI = const$ ).

*Решение.*

Балка один раз статически неопределима. Один из возможных вариантов основной системы для этой балки представлен на рис. 5,б. По этому варианту отброшена связь над промежуточной опорой, которая воспринимает изгибающий момент ( $X_1$  – изгибающий момент в сечении балки над средней опорой).

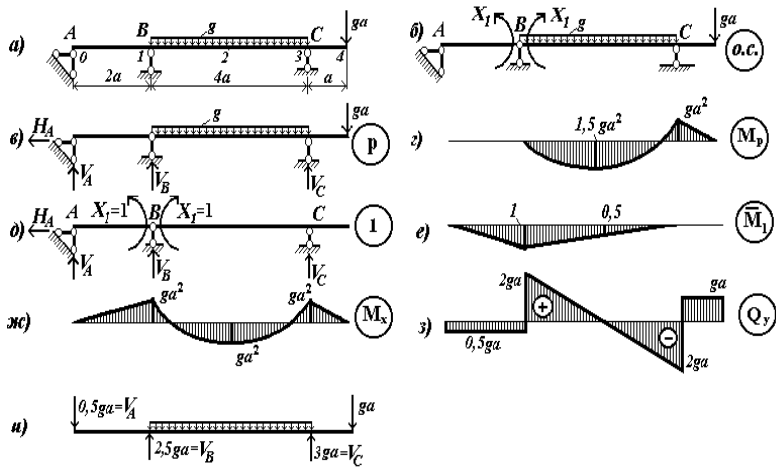


Рис. 5.

Построим грузовую эпюру изгибающих моментов  $M_p$  (рис. 5,з), и единичную эпюру изгибающих моментов  $\bar{M}_1$  (рис. 5,е), предварительно рассмотрев грузовое (рис. 5,в) и единичное состояние (рис. 5,д) основной системы.

Условием деформации основной системы является отрицание взаимного угла раскрытия сечения над средней (промежуточной) опорой (отрицание угла поворота левого и правого сечений балки над средней опорой).

Запишем уравнение деформаций:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

Определим единичные и грузовые перемещения:

$$\delta_{11} = \int_0^l \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1}{EI} dz = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2a \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4a \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right] = \frac{2a}{EI}$$

$$\Delta_{1P} = \int_0^l \frac{\bar{M}_1 M_p}{EI} dz = \frac{4a}{6EI} \left[ 1 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{3}{2} ga^2 \cdot \frac{1}{2} + ga^2 \cdot 0 \right] = \frac{2ga^3}{EI}$$

После подстановки полученных значений в уравнение деформаций найдем лишнее неизвестное  $X_1$ :

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{2ga^3 \cdot EI}{EI \cdot 2a} = -ga^2.$$

Знак минус указывает, что направление изгибающего момента, принятое предварительно, не совпадает с действительным.

Построим эпюру изгибающих моментов для заданной статически неопределимой балки. Её можно построить двумя способами.

*По первому* способу найденное значение  $X_1$  и заданную нагрузку прикладывают к основной системе. Поскольку основная система является статически определимой, после вычислений опорных реакций по уравнениям статики построение окончательной эпюры  $M$  не вызывает особых затруднений.

*По второму способу* ординаты окончательной эпюры изгибающих моментов определяются на основании принципа независимости действия сил в виде алгебраической суммы ординат двух эпюр: исправленной эпюры моментов  $\bar{M}_1 \cdot X_1$  и грузовой эпюрой  $M_p$ :

$$M_{кx} = \bar{M}_{1k} \cdot X_1 + M_{pk} \quad (3)$$

В расчетной практике обычно применяется второй способ. Воспользуемся им, и определим изгибающие моменты в сечениях 0, 1, 2, 3, 4:

$$\begin{aligned} M_0 &= 0 + 0 = 0; \\ M_1 &= 1(-ga^2) + 0 = -ga^2; \\ M_2 &= 0,5(-ga^2) + 1,5ga^2 = ga^2; \\ M_3 &= 0 - ga^2 = -ga^2; \\ M_4 &= 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Построенная по полученным значениям эпюра изгибающих моментов  $M_x$  показана на рис. 5,ж.

Правильность построенной окончательной эпюры изгибающих моментов  $M_x$ , можно проверить, если воспользоваться деформационной (кинематической) проверкой.

Кинематическая проверка состоит в том, что надо выполнить сопряжение окончательной эпюры изгибающих моментов  $M_x$  (рис. 5,ж.) с единичной  $\bar{M}_1$  (рис. 5,е) и должны получить ноль,

$$\Delta_{1сум} = \int_l \frac{\bar{M}_1 M_x dz}{EI} = \frac{1}{EI} \left[ -\frac{1}{2} ga^2 \cdot 2a \cdot \frac{2}{3} \cdot l + \frac{4a}{6} (-ga^2 \cdot l + 4ga^2 \cdot \frac{l}{2}) \right] = 0$$

Следовательно, проверка выполняется.

Используя, выражение аналогичное (3), можно строить эпюру поперечных сил. Однако, как правило, в расчетной практике построение эпюры поперечных сил  $Q_y$  выполняется по

окончательной эпюре изгибающих моментов, исходя из дифференциальной зависимости:

$$Q_y = \frac{dM}{dz} = tg\alpha, \quad (4)$$

где:  $\alpha$  - угол наклона, составляемый касательной к эпюре моментов с осью стержня. При этом поперечная сила будет положительна, если ось (базис) эпюры поворачивается кратчайшим путем до совмещения с касательной к эпюре моментов по ходу часовой стрелки.

Найдем  $Q_y$  на участках балки, где эпюра изгибающих моментов изменяется по линейному закону:

**участок 0 – 1**  $Q_y = tg\alpha_1 = - (ga^2)/2a = - 0,5ga$  (поворот против часовой стрелки),

**участок 3 – 4**  $Q_y = tg\alpha_2 = ga^2/a = ga$  (поворот по часовой стрелки).

На участке, где эпюра моментов очерчена по квадратной параболе (участок 1–3), поперечная сила изменяется по линейному закону. Для таких участков можно построить эпюру поперечных сил, как для балки на двух опорах, которая загружена внешней нагрузкой и дополнительными опорными моментами. Величины опорных моментов равны ординатам окончательной эпюры  $M_x$ , взятым на границах рассматриваемого участка.

Построим для этого участка эпюру  $Q_y$ , как для балки на двух опорах (рис. 6,а).

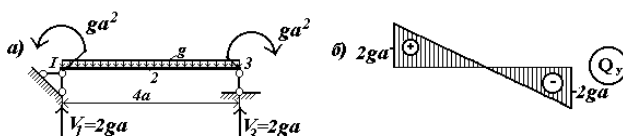


Рис. 6.

Составляя уравнения равновесия, получим значения опорных реакций:

$$\Sigma m_1 = 0, \quad V_3 = 2ga;$$

$$\Sigma m_3 = 0, \quad V_1 = 2ga.$$

Найденные значения реакций определяют ординаты поперечных сил в сечениях по концам рассматриваемого участка выделенной балки.

Используя метод сечений, запишем выражение для  $Q_y$  на рассматриваемом участке (рис. 6,б):

$$Q_y = V_1 - gz = 2ga - gz.$$

Положение нулевой точки на эпюре  $Q_y (z=2a)$  определяет положение вершины параболы, изгибающий момент в этом сечении достигает экстремального значения ( $M_x^{экстр.} = ga^2$ ).

Окончательная эпюра поперечных сил показана на рис. 5,з. По эпюре  $Q_y$  легко определяются опорные реакции в заданной статически неопределимой балке, как «скачки» на эпюре  $Q_y$ . На рис. 7, даны подробные пояснения, найденных реакций, они получены из

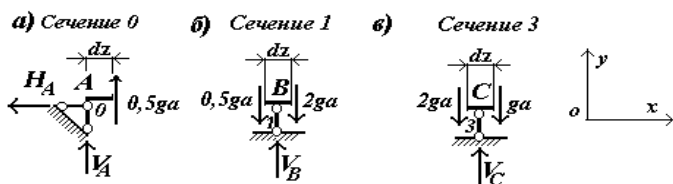


Рис. 7.

рассмотрения равновесия опорного узла и элемента балки конечной длины, выделенного в месте разрывов на эпюре  $Q_y$ . Для опорных узлов A, B, C имеем:

$V_A = 0,5 ga$ , реакция направлена вниз (рис. 7,а),

$V_B = 0,5 ga + 2 ga = 2,5 ga$ , направлена вверх (рис. 7,б),

$V_C = 2 ga + ga = 3 ga$ , направлена вверх (рис. 7,в).

Для проверки, найденных реакций, отсечем балку от опор и приложим вместо них найденные реакции, а также действующую на балку нагрузку (рис. 5,и).

Составим уравнение равновесия:

$$\sum Y = - 0,5 ga + 2,5 ga + 3ga - 4 ga - ga = 0.$$

Следовательно, проверка выполняется.

### 3. Внешне статически неопределимые рамы

При изучении схематизации элементов конструкций было условлено, что *рамой* называется стержневая система, состоящая из отдельных стержней (стоек и ригелей) во всех или некоторых узлах жестко соединенных между собой, вследствие чего изгиб одного из них вызывает деформацию других прилегающих к нему стержней.

Стержневые элементы, воспринимающие вертикальные сжимающие (растягивающие) силы, называются *стойками*, а горизонтальные элементы – *ригелем*.

Метод сил, использованный при расчете статически неопределимых балок, легко может быть распространен на расчет статически неопределимых рам. Последовательность расчета рассмотрим на примере.

**Пример 2.** Для рамы (рис. 8,а) построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил. Найти опорные реакции.

*Решение.* На раму наложены четыре связи, а именно две шарнирно-неподвижные опоры. Статика для плоской системы сил дает три уравнения равновесия, следовательно, система имеет одну лишнюю связь, т.е. *один раз статически неопределима*.

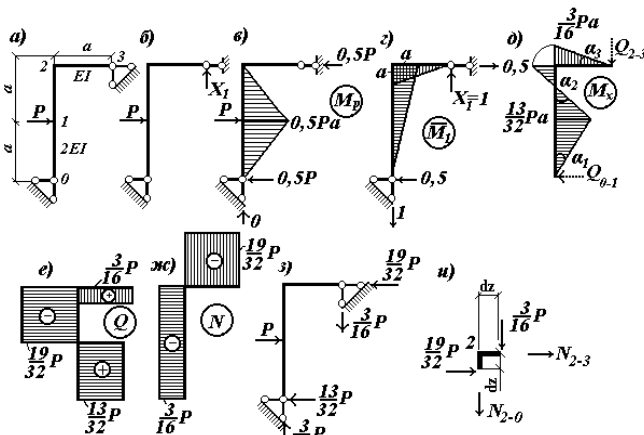


Рис. 8.

Выбираем основную систему, отбросив вертикальную связь на правой опоре (рис. 8,б).

Построим грузовую эпюру изгибающих моментов  $M_p$  (рис. 8,в) и единичную эпюру изгибающих моментов  $M_1$  (рис. 8,г) от силы  $X_1=1$  в основной системе.

Запишем каноническое уравнение метода сил для определения лишнего неизвестного

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

Физический смысл его заключается в том, что перемещения в основной системе, вызванные внешней нагрузкой и лишним неизвестным, должны быть такими же, как и в заданной системе, т.е. отрицание вертикального перемещения правой опоры.

Определяем единичное  $\delta_{11}$  и грузовое  $\Delta_{1P}$  перемещения.

Для их вычисления воспользуемся *правилом Верещагина*. По этому правилу интеграл Мора для отдельного участка вычисляется, как произведение площади криволинейной эпюры изгибающих моментов на ординату линейной эпюры изгибающих моментов, взятую под центром тяжести площади криволинейной, деленное на жесткость поперечного сечения данного участка. Когда на данном участке обе эпюры линейны, совершенно безразлично, на каком из них брать площадь и на каком – ординату. Вычисление коэффициента  $\delta_{11}$  не требует комментариев.

$$\delta_{11} = \int_l \frac{\overline{M}_1 \cdot \overline{M}_1 dz}{EI} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} a \cdot a \cdot \frac{2}{3} a + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} a \cdot 2a \cdot \frac{2}{3} a = \frac{2a^3}{3EI}$$

Коэффициент  $\Delta_{1P}$  вычислен, как произведение площади ломаной эпюры изгибающих моментов  $M_P$  (рис. 8,в) на ординату линейной эпюры изгибающих моментов  $\overline{M}_1$  (рис. 8,е) взятой под центром тяжести площади эпюры  $M_P$  (здесь площадь ломаной эпюры рассматривается, как предельное выражение криволинейной эпюры).

$$\Delta_{1P} = \int_l \frac{\overline{M}_1 M_P dz}{EI} = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{Pa}{2} \cdot 2a \cdot \frac{a}{2} = \frac{Pa^3}{8EI}$$

Решая каноническое уравнение, находим

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{Pa^3 \cdot 3EI}{8EI \cdot 2a^3} = -\frac{3}{16} P.$$

Построим эпюру изгибающих моментов для заданной статически неопределимой рамы. Для этого найдем изгибающие моменты в сечениях 0,1,2,3 (рис. 8,а), используя выражение ( 3 ):

$$\begin{aligned} M_0 &= 0; \quad M_1 = a / 2 ((-3 / 16) P) + Pa / 2 = ( 13 / 32) Pa; \\ M_2 &= a ((-3 / 16) P) + 0 = (-3 / 16) Pa; \quad M_3 = 0. \end{aligned}$$

Построенная по полученным значениям окончательная эпюра изгибающих моментов  $M_x$  показана на рис. 8,д.

Произведем проверку окончательной эпюры моментов.

Статическая проверка удовлетворяется, так как узел рамы находится в равновесии.

Деформационная проверка. Окончательная эпюра изгибающих моментов (рис. 8,д) получена с использованием основной статически определимой системы и может пониматься как эпюра в статически определимой системе при действии на нее заданной нагрузки и лишнего неизвестного  $X_1$ . Если выполним её сопряжение с эпюрой  $M_1$  (рис. 8,е), то на основании метода Мора получим вертикальное перемещение точки приложения силы  $X_1$ . Но это перемещение должно быть равно нулю, так как лишнее неизвестное найдено из условия, что перемещение по его направлению равно нулю. Вычислим это перемещение для нашего случая:

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{изм}} &= \int_1 \frac{\bar{M}_1 M_1 dz}{EI} = \frac{1}{2EI} \times \\ &\times \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot a \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{13}{32} Pa + \frac{a}{6} \left( \frac{a}{2} \cdot \frac{13}{32} \cdot Pa + 4 \cdot \frac{a + \frac{a}{2}}{2} \cdot \frac{13}{32} Pa - \frac{3}{16} Pa \right) - a \cdot \frac{3}{16} Pa \right] - \\ &- \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{16} Pa = 0. \end{aligned}$$

Полученный результат деформационной проверки говорит о правильности составления и решения канонического уравнения.

По эпюре изгибающих моментов построим эпюру поперечных сил, используя зависимость ( 4 ):

участок 0-1

$$Q_{0-1} = tg \alpha_1 = \frac{13Pa}{32a} = (13/32)P$$

участок 1-2

$$Q_{1-2} = tg \alpha_2 = -\frac{\frac{3}{16} Pa + \frac{13}{32} Pa}{a} = -(19/32)P,$$

участок 2-3

$$Q_{2-3} = tg \alpha_3 = \frac{3Pa}{16a} = (3/16)P.$$

Эпюра поперечных сил  $Q$  показана на рис. 8,е.

Используя эпюру поперечных сил построим эпюру продольных сил. Для этого вырежем узел «2» и к нему взамен отброшенных стержней приложим поперечные силы и неизвестные продольные



силы (рис. 8,у). При этом положительные поперечные силы направляем так, чтобы они вращали узел по часовой стрелке. Искомые продольные силы направим от сечения, т.е. будем считать положительными (предполагаем, что стержень работает на растяжение). Полученный результат со знаком минус означает, что тот или другой стержень сжат.

Для заданного узла 2 (рис. 8,у) имеем: на ригеле поперечная сила положительная и равна  $(3/16)P$ , т.е. она стремится повернуть вырезанный узел по ходу часовой стрелки.

На стойке поперечная сила отрицательная, она равна  $(19/32)P$  и стремится повернуть узел против хода часовой стрелки.

Продольные силы, действующие в стойке и ригеле, определим из уравнений равновесия:

$$\Sigma X = N_{2-3} + \frac{19}{32}P = 0; \Sigma Y = N_{2-0} + \frac{3}{16}P = 0,$$

Находим, что

$$N_{2-3} = -\frac{19}{32}P; N_{2-0} = -\frac{3}{16}P,$$

Эпюра продольных сил  $N$  показана на рис. 8,ж. Необходимо отметить, если бы в узле действовали внешние сосредоточенные силы, то они участвовали бы в уравнениях равновесия.

По эпюре  $Q$  и  $N$  легко определить опорные реакции в заданной статически неопределимой раме. На рис. 8,з показаны истинные направления опорных реакций и действующая на раму нагрузка.

Проверим равновесие всех сил, действующих на раму (рис. 8,з). Для этого составим три уравнения статики:

$$\Sigma X = P - (19/32)P - (13/32)P = 0; \Sigma Y = (3/16)P - (3/16)P = 0;$$

$$\Sigma M_o = P \cdot a - (19/32)P \cdot 2a + (3/16)P \cdot a = 0$$

т.е. рама находится в равновесии. Следовательно, статический расчет рамы произведен правильно.

#### 4. Расчет дважды статически неопределимой рамы

Стержневые системы, подобные рассмотренной в примере 2, называют иногда *внешне статически неопределимой*, или говорят, что *система статически неопределима относительно*

опорных реакций. «Лишними» могут быть и внутренние связи, т.е. связи, препятствующие взаимным линейным и угловым перемещениям каких либо сечений стержней.

Если рассмотреть раму, показанную на рис. 9,а, то опорные реакции рамы при любой нагрузке могут быть определены из уравнений статики, но внутренние силовые факторы с помощью метода сечений определить нельзя. Системы, подобные изображенной на рис. 9,а, называют иногда *внутренне статически неопределимыми*.

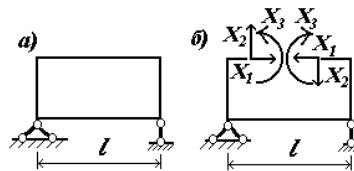


Рис. 9.

Прямоугольная рама (рис. 9,а) представляет собой замкнутый контур. Она трижды статически неопределима. Для превращения ее в статически определимую необходимо перерезать один из ее элементов (рис. 9,б) и тем самым устранить три лишних связи. Реакциями этих связей являются продольная сила  $X_1$ , поперечная сила  $X_2$ , и изгибающий момент  $X_3$ , в месте разреза. Эти реакции при помощи уравнений статики найти нельзя. В аналогичных условиях в смысле статической неопределимости находится любой замкнутый контур, который всегда трижды статически неопределим.

*Замкнутым контуром* называется контур, состоящий из ряда элементов (прямых, криволинейных), жестко (без шарниров) связанных между собой и образующих замкнутую цепь.

Шарнир, соединяющий два стержня (рис. 10,а) снижает степень статической неопределимости на единицу. Для этого случая мож-

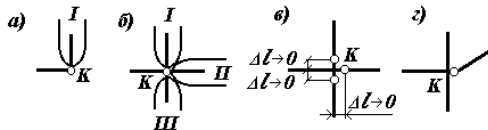


Рис. 10.

но составить одно дополнительное уравнение:

$$\sum M_K^I = 0.$$

Такой шарнир будем называть *простым или одиночным*.

На рис. 10,б, показан *сложный (полный)* шарнир, он эквивалентен трем простым шарнирам (рис. 10, в). Для этого случая можно составить три дополнительных уравнения статики:

$$\Sigma M_K^I = 0; \quad \Sigma M_K^{II} = 0; \quad \Sigma M_K^{III} = 0,$$

где: *I, II, III* – части конструкции, расположенные по одну сторону от сечения, проведенного через шарнир *K*.

В общем случае, шарнир, соединяющий с стержней (*сложный шарнир*) эквивалентен ( $s - 1$ ) простым шарнирам. При этом шарнир должен пересекать все примыкающие к узлу стержни. Показанный на рис. 10,з, шарнир является простым. Таким образом, для определения степени статической неопределимости ( $n$ ) можно пользоваться формулой:

$$n = 3 \cdot k - \omega_0, \quad (5)$$

где:  $k$  – число замкнутых контуров;

$\omega_0$  – число простых (одиночных) шарниров.

При использовании формулы (5) в число замкнутых контуров следует включать области, образованные опорными стерженьками и основанием сооружения (дискон земли).

Рассмотрим несколько примеров определения степени статической неопределимости рамных систем. На рис. 11 показано несколько рам. Последовательно рассмотрим их.

Во всех схемах выделим неподвижный диск, в качестве которого обычно используется земля. На исследуемых схемах воображаемые линии показаны пунктирными линиями.

Для рамы, показанной на рис. 11,а, замкнутых контуров четыре, они отмечены римскими цифрами, семь одиночных шарниров и один двойной, шарниры отмечены арабскими цифрами. Применяя, формулу (5) получим:

$$i = 3 \cdot k - \omega = 3 \cdot 4 - 9 = 3$$

Рассуждая, аналогичным образом для рассматриваемых схем имеем:

для схемы, показанной на рис. 11,б:

$$i = 3k - \omega = 3 \cdot 4 - 8 = 4,$$

для схемы, показанной на рис. 11,в:

$$i = 3k - \omega = 3 \cdot 4 - 9 = 3,$$

для схемы, показанной на рис. 11,г:

$$i = 3k - \omega = 3 \cdot 5 - 1 = 4.$$

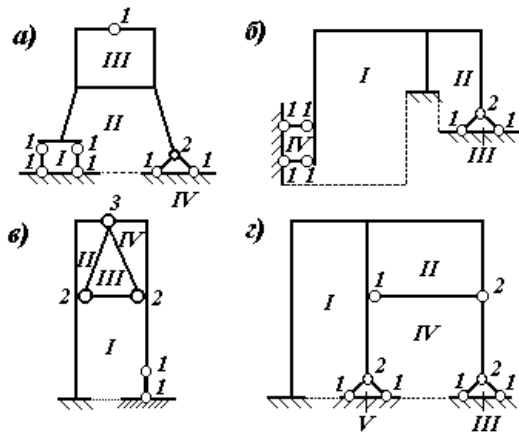


Рис. 11.

После установления степени статической неопределенности необходимо выбрать основную систему. Для этой цели необходимо путем отбрасывания связей превратить заданную систему в простую статически определимую систему.

Требования, предъявляемые к основной системе: она должна быть геометрически и мгновенно неизменяемой, должна быть простой и удобной для построения эпюр изгибающих моментов от действия неизвестных и нагрузки.

Можно составить несколько вариантов основной системы. На рис. 12,а показана рама, которая трижды статически неопределима. Первый вариант основной системы, рис. 12,б, получен из заданной рамы путем отбрасывания заделки у правой стойки. Полученная статически определимая система представляет собой ломаный стержень, заделанный на левом конце. Вместо заделки на правом конце приложены три внутренних силовых фактора:  $X_1$  – продольная сила,  $X_2$  – поперечная сила,  $X_3$  – изгибающий момент.

На рис. 12,в, показан другой вариант основной системы, полученной из заданной системы путем разреза горизонтального элемента (ригеля). Основная система состоит теперь из двух ломаных стержней, каждый из которых заделан на одном конце, поэтому статически определим. В месте разреза приложены, к обоим стержням, внутренние силовые факторы:  $X_1$  – продольная сила,  $X_2$  – поперечная сила,  $X_3$  – изгибающий момент.

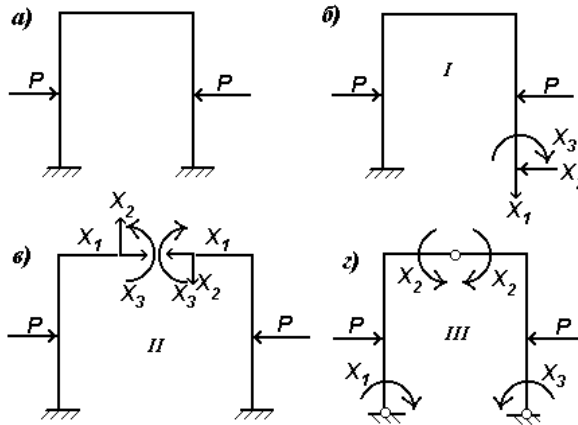


Рис. 12.

В третьем варианте основной системы введены три шарнира, рис. 12,г. Введение шарниров снимает моментную связь (уничтожает внутренние моменты). Для того чтобы полученная основная система была эквивалентна заданной системе, необходимо приложить в местах введения шарниров внешние моменты  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$ . Как было уже ранее установлено, при расчете основной системы, исходят из того, что она будет деформироваться так же, как заданная система. Тогда для определения неизвестных  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$ , (рис. 12,б) послужит условие равенства нулю вертикального, горизонтального перемещения и угла поворота заделки правой стойки. Применяя принцип независимости действия сил, можно записать уравнения перемещений в виде:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 &= \Delta_{1X_1} + \Delta_{1X_2} + \Delta_{1X_3} + \Delta_{1P} = 0; \\ \Delta_2 &= \Delta_{2X_1} + \Delta_{2X_2} + \Delta_{2X_3} + \Delta_{2P} = 0; \\ \Delta_3 &= \Delta_{3X_1} + \Delta_{3X_2} + \Delta_{3X_3} + \Delta_{3P} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Первый индекс у каждого из перемещений указывает номер неизвестного, в направлении которого происходит данное перемещение: второй индекс указывает причину, вызывающую перемещение. Так, например,  $\Delta_{2X_3}$  - перемещение в направлении силы  $X_2$  (горизонтальное перемещение) от момента  $X_3$ ;

$\Delta_{2P}$  - перемещение в том же направлении от действия заданной нагрузки.

Вводя единичные перемещения, приходим к следующей форме уравнений перемещений:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{13} X_3 + \Delta_{1P} &= 0; \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{23} X_3 + \Delta_{2P} &= 0; \\ \delta_{31} X_1 + \delta_{32} X_2 + \delta_{33} X_3 + \Delta_{3P} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Физический смысл любого  $i$ -го уравнения (7) можно сформулировать так: *суммарное перемещение по направлению  $i$  - й отброшенной связи равно нулю.*

Все перемещения, обозначенные буквой  $\delta$ , называются единичными. Так:

$\delta_{ik}$  – перемещение в основной системе точки приложения силы  $X_i$  по её направлению от действия силы  $X_k = 1$ ;

$\delta_{ii}$  – перемещение в основной системе точки приложения силы  $X_i$  по её направлению от действия силы  $X_i = 1$ ;

$\Delta_{iP}$  – перемещение в основной системе точки приложения силы  $X_i$  по её направлению от действия заданной нагрузки.

Коэффициенты  $\delta$  с одинаковыми индексами называются *главными коэффициентами*. Они всегда *положительны и не равны нулю*. Все остальные коэффициенты  $\delta$  называются *побочными*. Они могут быть положительными, отрицательными или равными нулю. Чем больше побочных коэффициентов обратится в ноль, тем более удачной является выбранная основная система. Перемещения  $\Delta_{iP}$  называют *свободными членами уравнения*, они, как и побочные коэффициенты могут быть положительными, отрицательными или равными нулю.

Коэффициенты при неизвестных и свободные члены вычисляются по формуле Мора- Максвелла, из которой следует теорема Максвелла о взаимности перемещений между побочными коэффициентами с обратными индексами:

$$\delta_{ik} = \delta_{ki} \quad (8)$$

Для основной системы, содержащей два и более неизвестных, их вычисление представляет собой довольно трудоемкий процесс и при ручном счете нередко приводит к ошибкам в окончательных результатах расчета. Во избежание этих ошибок рекомендуется проводить проверки: универсальную, построчную и по столбцовую.

Для выполнения универсальной проверки надо построить так называемую *суммарную* единичную эпюру изгибающих моментов  $\bar{M}_s$  в основной системе при одновременном действии на нее всех неизвестных, равных единице. Эту же эпюру  $\bar{M}_s$  можно получить и путем алгебраического сложения построенных ранее единичных эпюр по формуле:

$$\bar{M}_s = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n \quad (9)$$

Алгебраическая сумма всех коэффициентов, входящих в уравнение (9), можно представить так:

$$\delta_{ss} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \delta_{ik} \quad (10)$$

С другой стороны, эта же сумма может быть вычислена путем перемножения суммарной единичной эпюры  $M_s$  самой на себя:

$$\delta_{ss} = \int \frac{\bar{M}_s^2}{EI} ds \quad (11)$$

Из сравнения этих результатов делают вывод о правильности вычислений коэффициентов при неизвестных.

Если универсальная проверка дает отрицательный результат, для отыскания ошибки проводится *построчная проверка*. При проведении этой проверки вычисляют:

$$\delta_{is} = \sum_{k=1}^n \delta_{ik}; \quad (12)$$

$$\delta_{is} = \int \frac{\bar{M}_s \bar{M}_i}{EI} ds.$$

Если построчные проверки дают расхождение только в одной строке уравнения, то ошибку следует искать при вычислении главного коэффициента этой строки. Если же расхождение имеется одновременно в двух строках канонического уравнения, то ошибку следует искать в побочном коэффициенте, содержащемся в тех двух строках, для которых построчные проверки не сходятся.

Для проверки правильности вычисления всех свободных членов проводится *постолбцовая проверка*.

$$\Delta_{sp} = \sum_{i=1}^n \Delta_{ip} = \int \frac{\bar{M}_s M_i P}{EI} ds. \quad (13)$$

Приведенные выше проверки имеет смысл проводить, если есть полная уверенность в правильности построения единичных и грузовой эпюр изгибающих моментов.

Подставив найденные коэффициенты и свободные члены в систему канонических уравнений ( 7 ) и решив её, можно определить истинные значения неизвестных метода сил  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .

Последовательность расчета дважды статически неопределимой рамы рассмотрим на конкретном примере.

**Пример 3.** Построить эпюры  $M, Q, N$  для рамы, изображенной на рис. 13,а. Исходные данные:  $a = 2 \text{ м}, q = 50 \text{ кН/м}, EI = 20000 \text{ кНм}^2$ . Найти угол поворота и горизонтальное перемещение узла  $D$ .

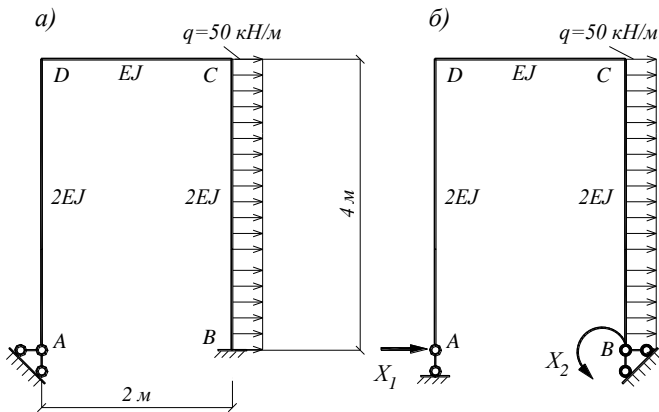


Рис. 13.

Решение.

1. Определим степень статической неопределимости по формуле:  $n = 3 \cdot k - u = 3 \cdot 2 - 4 = 2$ .

Заданная рама два раза статически неопределима.

2. Выбираем основную систему методом сил путем отбрасывания горизонтальной связи в шарнирно-неподвижной опоре  $A$  и врезания шарнира в заделку  $B$ . Выбранная основная система вместе с неизвестными  $X_1$  и  $X_2$  показана на рис. 13,б.

3. Запишем систему канонических уравнений метода сил:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0;$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0.$$

Последовательно загружая основную систему силами  $\bar{X}_1$ ,  $\bar{X}_2$  и внешней нагрузкой, построим единичные эпюры  $\bar{M}_1, \bar{M}_2$  и



грузовую эпюру  $M_P$ , а также суммарную единичную эпюру  $M_S$  (рис. 14, а, б, в, г).

4. Вычислим единичные и грузовые коэффициенты системы канонических уравнений метода сил:

$$\delta_{11} = \sum_L \int \frac{\bar{M}_1^2}{EI} dz = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 2 + \frac{1}{EI} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 = \frac{160}{3EI}$$

$$\delta_{22} = \sum_L \int \frac{\bar{M}_2^2}{EI} dz = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2EI} \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{8}{3EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum_L \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2}{EI} dz = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 - \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 1 = -\frac{8}{EI}$$

$$\delta_{SS} = \delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{21} + \delta_{22} = \frac{1}{EI} \cdot \left[ \frac{160}{3} - 2 \cdot 8 + \frac{8}{3} \right] = \frac{40}{EI}$$

$$\delta_{SS} = \sum_L \int \frac{\bar{M}_S^2}{EI} dz = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{2}{6EI} \left[ 2 \cdot 4 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \right] + \frac{4}{6 \cdot 2EI} \left[ 2 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 3 \right] = \frac{40}{EI}$$

Результаты совпали, следовательно, единичные коэффициенты  $\delta_{ij}$  вычислены верно.

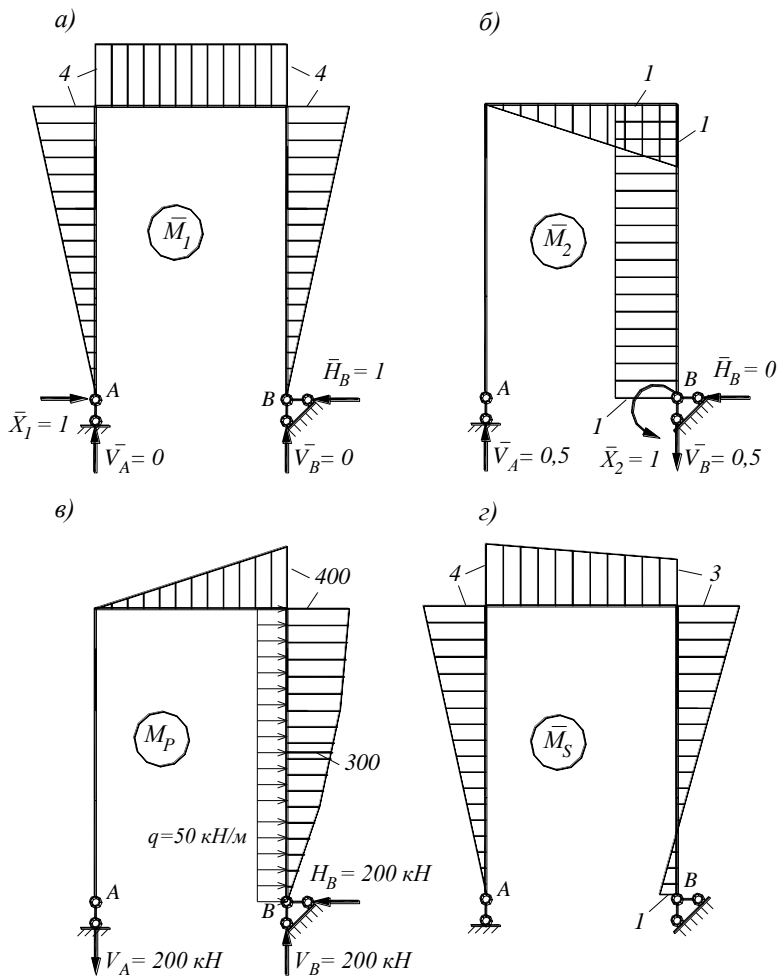


Рис. 14.

$$\Delta_{1P} = \sum_L \int \frac{\bar{M}_1 M_P}{EI} dz = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 400 \cdot 4 + \frac{4}{6 \cdot 2EI} \cdot [4 \cdot 400 +$$

$$+ 4 \cdot 2 \cdot 300 + 0] = \frac{8800}{3EI}$$

$$\Delta_{2P} = \sum_L \int \frac{\bar{M}_2 M_P}{EI} dz = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 400 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{4}{6 \cdot 2EI} \times [1 \cdot 400 + 4 \cdot 1 \cdot 300 +$$

$$+ 0] = -\frac{800}{EI}$$

$$\Delta_{SP} = \Delta_{1P} + \Delta_{2P} = \frac{8800}{3EI} - \frac{800}{EI} = \frac{6400}{3EI}$$

$$\Delta_{SP} = \sum_L \int \frac{\bar{M}_S M_P}{EI} dz = \frac{2}{6EI} \times [2 \cdot 4 \cdot 0 + 2 \cdot 3 \cdot 400 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 400] +$$

$$+ \frac{4}{6 \cdot 2EI} \times [3 \cdot 400 + 4 \cdot 1 \cdot 300 + 0] = \frac{6400}{3EI}$$

Грузовые коэффициенты  $\Delta_{iP}$  найдены верно.

1. Подставим вычисленные значения коэффициентов в канонические уравнения:

$$\frac{160}{3EI} X_1 - \frac{8}{EI} X_2 + \frac{8800}{3EI} = 0$$

$$-\frac{8}{EI} X_1 + \frac{8}{3EI} X_2 - \frac{800}{EI} = 0$$

Решив систему канонических уравнений, найдем значения неизвестных сил:  $X_1 = -18,18 \text{ кН}$ ;  $X_2 = 245,45 \text{ кН.м}$ .

2. Построим исправленные эпюры изгибающих моментов путем умножения единичных эпюр  $\bar{M}_1$  и  $\bar{M}_2$  на найденные значения сил  $X_1$  и  $X_2$  (см. рис. 15, а, б).

Затем по формуле

$$M = \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + M_P$$

строим окончательную эпюру изгибающих моментов  $M$  (рис. 16, а).

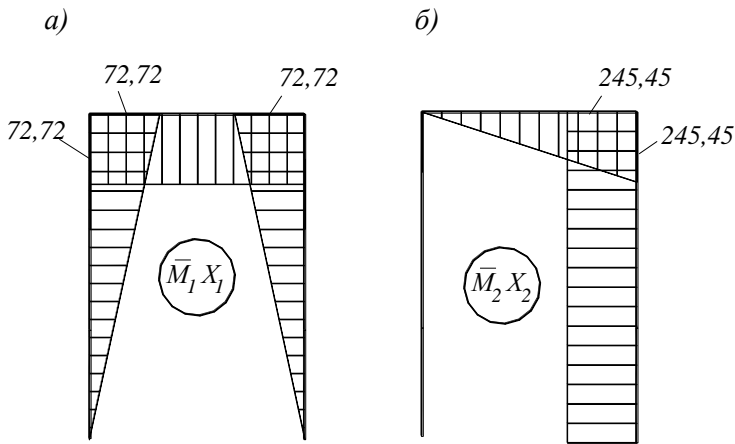


Рис. 15.

5. Проведем проверки окончательной эпюры изгибающих моментов.

**Статическая** проверка выполняется, т. к. все узлы рамы находятся в равновесии (см. рис. 16,б). Такая проверка необходима, но недостаточна. Она служит контролем правильности суммирования эпюр.

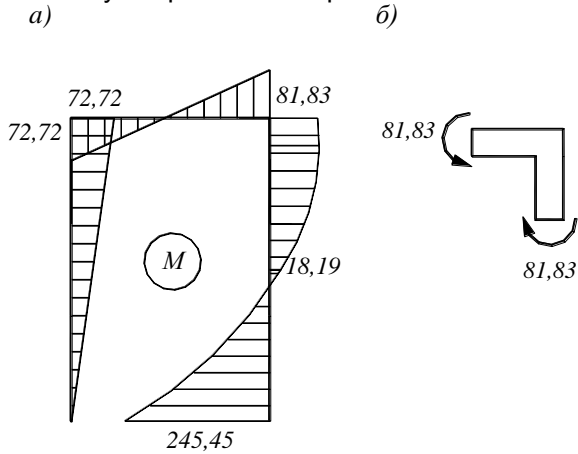


Рис. 16.

Выполним **деформационную** проверку:

$$\Delta_1 = \sum \int_L \frac{\bar{M}_1 M}{EI} dz = -\frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 72,72 + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \times$$

$$(81,83 - 72,72) \cdot 2 \cdot 4 + \frac{4}{6 \cdot 2EI} [4 \cdot 81,83 + 4 \cdot 2 \cdot 18,19 + 0] =$$

$$= -\frac{193,92}{EI} + \frac{194,05}{EI} = \frac{0,13}{EI}$$

Относительная погрешность составляет:

$$\varepsilon = \frac{0,13}{193,92} \cdot 100\% = 0,07\%$$

$$\Delta_2 = \sum \int_L \frac{\bar{M}_2 M}{EI} dz = \frac{2}{6EI} [2 \cdot 0 \cdot 72,72 + 2 \cdot 1 \cdot (-81,83) + 72,72 \cdot 1 -$$

$$- 81,83 \cdot 0] + \frac{4}{6 \cdot 2EI} [1 \cdot (-81,83) + 4 \cdot 1 \cdot (-18,19) + 1 \cdot 245,45] =$$

$$= -\frac{30,31}{EI} + \frac{30,29}{EI} = -\frac{0,02}{EI}$$

$$\varepsilon = \frac{0,02}{30,29} \cdot 100\% = 0,07\%$$

Допустимой считается погрешность до 1 – 2 %. На основе выполненных проверок убеждаемся в правильности построения окончательной эпюры моментов.

9. По окончательной эпюре изгибающих моментов **M** построим эпюру поперечных сил **Q**. На участках, где эпюра моментов линейна, численное значение поперечной силы равно тангенсу угла наклона эпюры моментов к ее оси. Вычислим поперечные силы на таких участках:

**участок AD:**  $Q = 72,72/4 = 18,18 \text{ кН};$

**участок DC:**  $Q = -(72,72 + 81,83)/2 = -77,28 \text{ кН}.$

На участке **BC** эпюра моментов имеет вид квадратной параболы, а поперечная сила изменяется по линейному закону.

Представим этот участок, в виде балки на двух опорах, нагруженной заданной нагрузкой и опорными моментами, взятыми из эпюры **M** (рис. 17,а). Построим для этого участка эпюру **Q**. Окончательная эпюра поперечных сил **Q** для всей рамы показана на рис. 17,б.

Для построения эпюры продольных сил **N** вырежем узлы **D** и **C** рамы (рис. 18). Составим уравнения равновесия для узла **D**.

$$\sum X = 0 \quad N_{DC} - 18,18 = 0 \quad N_{DC} = 18,18 \text{ кН}$$

$$\sum Y = 0 \quad 77,28 - N_{DA} = 0 \quad N_{DA} = 77,28 \text{ кН}.$$

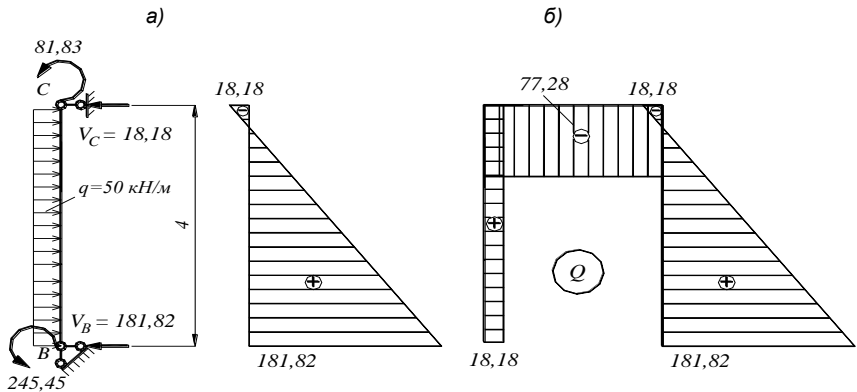


Рис. 17.

Составим уравнения равновесия для узла **C**.

$$\sum Y = 0 \quad -77,28 - N_{CB} = 0 \quad N_{CB} = -77,28 \text{ кН}.$$

Эпюра **N** показана на рис. 19.

Выполним статическую проверку эпюр **Q** и **N**. Рассечем исходную статически неопределимую раму в точках **A** и **B** (рис. 13). Рассмотрим равновесие верхней отсеченной части, приложив внутренние усилия, возникающие в сечениях в точках **A** и **B** участков **AD** и **BC** рамы соответственно (рис. 20). Составим уравнения равновесия:

$$\sum X = 0 \quad -18,18 - 181,82 + 50 \cdot 4 = 0$$

$$\sum Y = 0 \quad -77,28 + 77,28 = 0.$$

Статическая проверка выполняется.

а)

б)

Узел D

Узел C

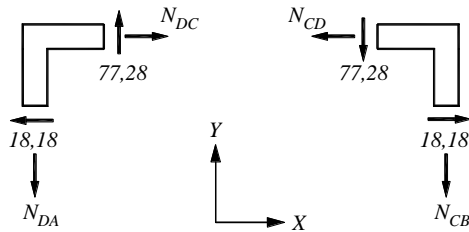


Рис. 18.

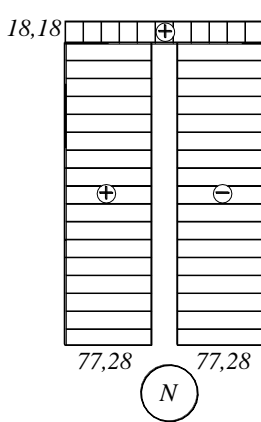


Рис. 19.

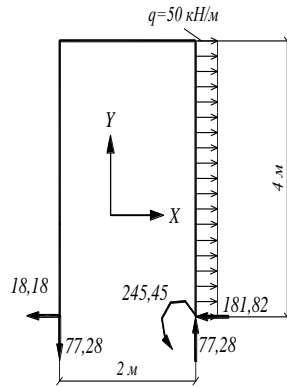


Рис. 20.

**Найдем горизонтальное перемещение узла D.** Приложим к указанному узлу основной системы метода сил горизонтальную безразмерную единичную силу  $\bar{P} = 1$  (рис. 21,а) и построим единичную эпюру моментов  $\bar{M}_V$ .

Горизонтальное перемещение узла D будет равно:

$$\begin{aligned} \Delta_D &= \sum_L \int \frac{\bar{M}_\Delta M}{EI} dz = \frac{2}{6EI} [2 \cdot (-4) \cdot (-81,83) + (-4) \cdot 72,72] + \\ &+ \frac{4}{6 \cdot 2EI} [(-4) \cdot (-81,83) + 4 \cdot (-2) \cdot (-18,19) + 0 \cdot 245,45] = \\ &= \frac{836,6}{EI} = \frac{836,6}{20000} = 0,0139 \text{ м} = 13,9 \text{ мм} \end{aligned}$$

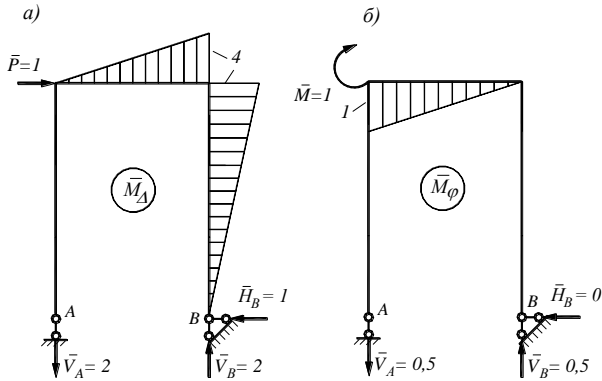


Рис. 21.

Определим угол поворота узла **D**. Приложим к указанному узлу основной системы метода сил безразмерный единичный момент  $\bar{M} = 1$  (рис. 21,б) и построим единичную эпюру моментов  $\bar{M}_\varphi$ . Угол поворота узла **D** равен:

$$\begin{aligned} \varphi_D &= \sum_L \int \frac{\bar{M}_\varphi M}{EI} dz = \frac{2}{6EI} [2 \cdot 1 \cdot 72,72 + 1 \cdot (-81,83)] = \\ &= \frac{63,61}{EI} = \frac{63,61}{20000} = 0,00106 = 0,061^\circ. \end{aligned}$$



## 5. Определение перемещений от тепловых воздействий в статически определимых рамах.

Под тепловым воздействием понимается изменение температуры стержней по сравнению с некоторой начальной. Для краткости термин «изменение температуры» заменяют термином «температура».

Одним из важных свойств статически определимых систем является отсутствие усилий в стержнях таких систем от теплового воздействия. Если по длине стержня изменение температуры остается постоянным, а также постоянными являются коэффициент линейного расширения материала  $\alpha$  и высота поперечного сечения  $h$ , то в предположении линейного распределения температуры по высоте сечения для определения перемещений можно использовать формулу Максвелла-Мора в следующем виде:

$$\Delta_{kt} = \sum_L \int \frac{\alpha \Delta t \bar{M}_k}{h} dz + \sum_L \int \alpha t_0 \bar{N}_i dz = \sum \frac{\alpha \Delta t}{h} \Omega_M + \sum \alpha t_0 \Omega_N, \quad (14)$$

где:  $\Delta t = t_1 - t_2$ ;  $t_0 = 0,5(t_1 + t_2)$ ;  $t_1$  и  $t_2$  – изменения температур крайних волокон стержня;  $\Omega_M$  – площадь единичной эпюры  $\bar{M}_k$ ,  $\Omega_N$  – площадь единичной эпюры  $\bar{N}_k$ . Обе эти эпюры строятся от действия единичных безразмерных силы  $\bar{P} = 1$  (если вычисляется линейное перемещение) или  $\bar{M} = 1$  (если вычисляется угол поворота), приложенных в точке  $K$  по направлению искомого перемещения. При вычислении перемещения  $\Delta_{kt}$  интегрирование распространяется лишь на те элементы сооружения, температурный режим которых изменился.

**Пример 4.** Найти горизонтальное перемещение узла  $B$  и угол поворота узла  $C$  (рис. 22), если  $t_1 = 18^\circ\text{C}$ ,  $t_2 = 6^\circ\text{C}$ ,  $\alpha = 12,5 \times 10^{-6}$  1/град (материал – сталь),  $h_1 = 0,4$  м;  $h_2 = 0,3$  м.

*Решение.* Единичные эпюры  $\bar{M}_1$  и  $\bar{N}_1$ , построенные от действия горизонтальной безразмерной единичной силы  $\bar{P} = 1$ , приложенной в точке  $B$ , представлены на рис. 23, а, б.

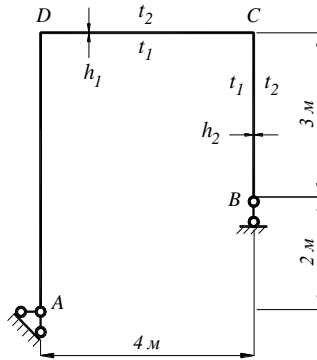


Рис. 22.

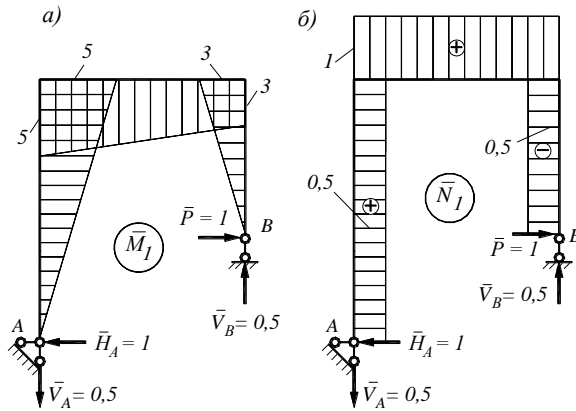


Рис. 23.

Горизонтальное перемещение точки  $B$  будет равно:

$$\Delta_{Bt} = 12,5 \cdot 10^{-6} \cdot \left[ \frac{18-6}{0,4} \cdot 0,5 \cdot (5+3) \cdot 4 + \frac{18-6}{0,3} \cdot 0,5 \cdot 3 \cdot 3 \right] +$$

$$+ 12,5 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{18+6}{2} \cdot [4 \cdot 1 + 3 \cdot (-0,5)] = 8,625 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Определим угол поворота узла **С**. Единичные эпюры  $\bar{M}_2$  и  $\bar{N}_2$ , построенные от действия безразмерного единичного момента  $\bar{M} = 1$ , приложенного в точке **С**, приведены на рис. 24, а, б.

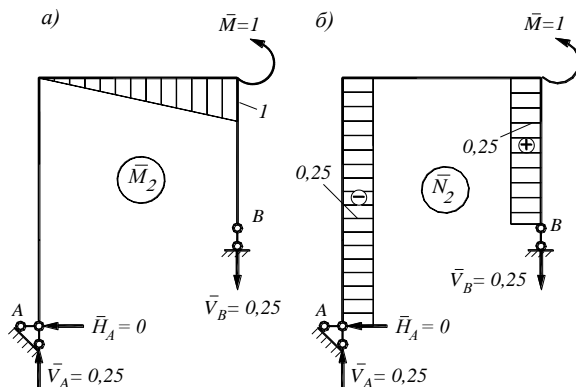


Рис. 24.

Угол поворота узла **С** будет равен:

$$\begin{aligned} \varphi_{Ct} &= 12,5 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{18-6}{0,4} \cdot 0,5 \cdot 4 \cdot 1 + 12,5 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{18+6}{2} \cdot 3 \cdot 0,25 = \\ &= 8,625 \cdot 10^{-4} \text{ рад.} \end{aligned}$$

## 6. Расчет статически неопределимых рам на тепловые воздействия.

Система канонических уравнений метода сил при расчете статически неопределимых систем на действие температуры имеет вид:

$$\begin{aligned} &\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1t} = 0 \\ &\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2t} = 0 \\ &\dots\dots\dots \\ &\delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nt} = 0 \end{aligned} \tag{15}$$

Здесь  $\delta_{ij}$  – единичные коэффициенты, определяемые так же, как и при расчете на действие внешней нагрузки;  $\Delta_{it}$  – температурные перемещения в основной системе по направлениям лишних неизвестных усилий  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Они определяются по формуле (14). Смысл канонических уравнений заключается в том, что перемещения по направлению отброшенных связей от совместного действия неизвестных метода сил и температурного воздействия в основной системе равны нулю.

Так как при температурных воздействиях в статически определимых системах деформации не возникают, то грузовая эпюра отсутствует. Окончательную эпюру моментов получают на основании соотношения

$$M = \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \dots + \bar{M}_n X_n . \tag{16}$$

**Пример 5.** Построить эпюру моментов в статически неопределимой раме (рис. 25,а), если  $t_1=18^{\circ}\text{C}$ ,  $t_2=6^{\circ}\text{C}$ ,  $\alpha=12,5 \times 10^{-6}$  1/град (материал – сталь),  $h_1= 0,4$  м;  $h_2= 0,3$  м.  $E=2 \times 10^8$  кН/м<sup>2</sup>;  $I=10^{-5}$  м<sup>4</sup>. Тогда  $EI=2000$  кН м<sup>2</sup>.

Определим степень статической неопределимости по формуле:

$$n = 3 \cdot k - \omega = 3 \cdot 3 - 8 = 1.$$

Заданная рама один раз статически неопределимая.

Рама к земле прикреплена 4-мя простыми связями, в то время, как минимальное необходимое число связей для плоской рамы – 3.

Выбираем основную систему метода сил путем отбрасывания горизонтальной связи в шарнирно-неподвижной опоре В. Выбранная основная система вместе с неизвестным  $X_1$  показана на рис. 25,б. Отметим, что основная система полностью совпадает со схемой на рис. 22.

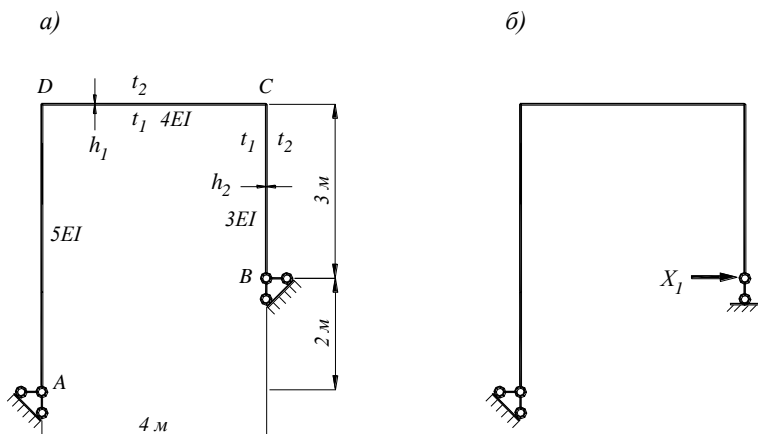


Рис. 25.

Система канонических уравнений метода сил ( 15 ) сводится к одному уравнению:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1t} = 0.$$

Единичные эпюры  $\bar{M}_1$  и  $\bar{N}_1$ , построенные от действия единичного неизвестного  $X_1 = 1$ , совпадают с аналогичными эпюрами, представленными на рис. 23,а,б. Найдем единичный коэффициент  $\delta_{11}$ :

$$\delta_{11} = \sum_L \int \frac{\bar{M}_1^2}{EI} dz = \frac{1}{5EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 + \frac{4}{6 \cdot 4EI} [ 2 \cdot 5 \cdot 5 + 2 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 5 \cdot 3 ] + \frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 = \frac{27,67}{EI}.$$

Вычислим грузовой коэффициент  $\Delta_{1t}$ . Он равен горизонтальному перемещению узла **B** от заданного теплового воздействия в основной системе метода сил. Указанная величина найдена в параграфе 5. Она равна  $\Delta_{1t} = 8,625 \times 10^{-3} \text{ м}$ .

Найдем неизвестное метода сил  $X_1$ .

Решение канонического уравнения метода сил дает:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{It}}{\delta_{11}} = -\frac{8,625 \cdot 10^{-3}}{27,67} \cdot EI = -\frac{8,625 \cdot 10^{-3}}{27,67} \cdot 2000 = -0,62 \text{ кН}.$$

Окончательную эпюру моментов получим по формуле:

$$M = \bar{M}_1 X_1.$$

Окончательная эпюра моментов показана на рис. 26.

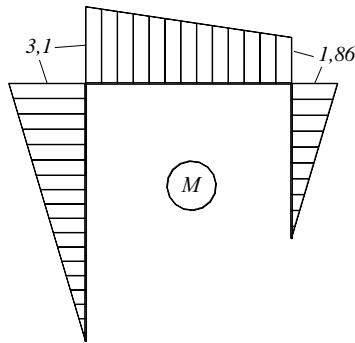


Рис. 26.

Статическую проверку для полученной эпюры предлагаем читателю выполнить самостоятельно. Рассмотрим деформационную проверку. Ее физический смысл состоит в том, что перемещение узла **B** по горизонтали от совместного действия неизвестного  $X_1$  и изменения температуры в основной системе метода сил равно нулю.

$$\begin{aligned} \Delta_B &= \sum_L \int \frac{\bar{M}_1 M}{EI} dz + \Delta_{It} = -\frac{1}{5EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3,1 - \frac{4}{6 \cdot 4EI} \times \\ &\times [2 \cdot 5 \cdot 3,1 + 2 \cdot 3 \cdot 1,86 + 5 \cdot 1,86 + 3 \cdot 3,1] - \frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \times \\ &\times \frac{2}{3} \cdot 1,86 + 8,625 \cdot 10^{-3} = -\frac{17,15}{2000} + 8,625 \cdot 10^{-3} = \\ &= -8,577 \cdot 10^{-3} + 8,625 \cdot 10^{-3} = 0,48 \cdot 10^{-3}. \end{aligned}$$

Относительная погрешность выполнения деформационной проверки составляет:

$$\varepsilon = \frac{0,48 \cdot 10^{-3}}{8,577 \cdot 10^{-3}} \cdot 100\% = 0,56\% < 1 \div 2\%.$$

## 7. Расчет плоских статически неопределимых рам на осадку опор.

Решение задачи расчета плоских статически неопределимых рам на осадку опор сводится к системе канонических уравнений (15), где грузовые коэффициенты  $\Delta_{it}$  следует заменить на величины  $\Delta_{i\Delta}$ . Указанные величины являются перемещениями в основной системе по направлениям лишних неизвестных усилий  $X_1, X_2, \dots, X_n$  от осадки опор.

Так как при осадках опор в статически определимых системах деформаций не возникает, то грузовая эпюра равна нулю, поэтому окончательную эпюру моментов получают, как и в задачах на тепловые воздействия на основании соотношения (16).

**Пример 6.** Построить эпюру моментов в статически неопределимой раме (рис. 27,а), если  $\Delta=0,01$  м,  $\varphi=0,0005$  рад, материал – сталь,  $E=2 \times 10^8$  кН/м<sup>2</sup>;  $I=5 \times 10^{-5}$  м<sup>4</sup>. Тогда  $EI=10000$  кН м<sup>2</sup>.

Определим степень статической неопределимости:

$$n = 3 \cdot \kappa - \omega = 3 \cdot 1 - 2 = 1.$$

Основная система метода сил показана на рис. 27,б. Каноническое уравнение метода сил имеет вид:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1\Delta} = 0.$$

Единичная эпюра моментов  $\bar{M}_1$  представлена на рис. 28,а. Найдем единичный коэффициент  $\delta_{11}$ :

$$\delta_{11} = \sum \int_L \frac{\bar{M}_1^2}{EI} dz = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 + \frac{1}{EI} \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = \frac{166,67}{EI}.$$

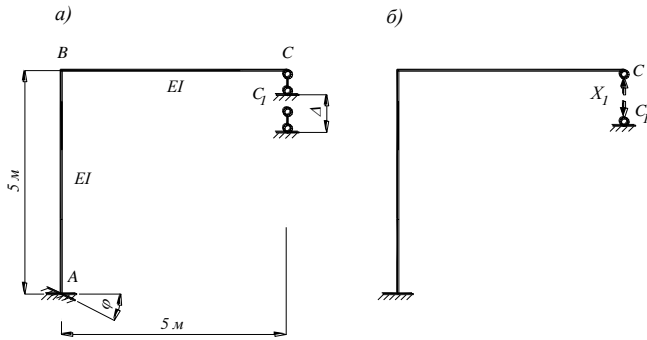


Рис. 27.

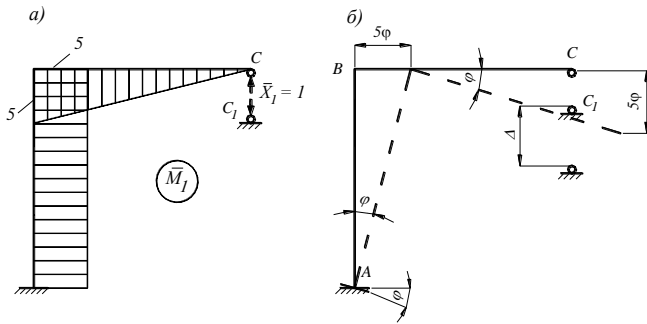


Рис. 28.

На рис. 28,б показаны перемещения в основной системе метода сил, вызванные поворотом заделки на угол  $\varphi=0,0005$  по часовой стрелке и перемещение точки  $C_1$  вниз на величину  $\Delta=0,01$  м. Перемещение по направлению неизвестного  $X_1$ , приложенного в т. C, происходит против направления  $X_1$  и равно  $-5\varphi$ . Перемещение по направлению неизвестного  $X_1$ , приложенного в т.  $C_1$ , происходит по направлению  $X_1$  и равно  $\Delta$ . Тогда грузовой коэффициент равен:

$$\Delta_{1\Delta} = \Delta - 5\varphi = 0,01 - 5 \cdot 0,0005 = 0,0075 \text{ м.}$$

Следовательно:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1\Delta}}{\delta_{11}} = -\frac{7,5 \cdot 10^{-3}}{166,67} \cdot EI = -4,5 \cdot 10^{-6} \cdot 10^4 = -0,45 \text{ кН.}$$



Окончательную эпюру моментов получим по формуле:

$$M = \bar{M}_1 X_1.$$

Окончательная эпюра моментов представлена на рис. 29. Выполним деформационную проверку:

$$\begin{aligned} \sum \int_L \frac{\bar{M}_1 M}{EI} dz + \Delta_{1\Delta} &= -\frac{1}{10000} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,25 - \frac{4}{10000} \times \\ &\times 5 \cdot 5 \cdot 2,25 + 7,5 \cdot 10^{-3} = -7,5 \cdot 10^{-3} + 7,5 \cdot 10^{-3} = 0. \end{aligned}$$

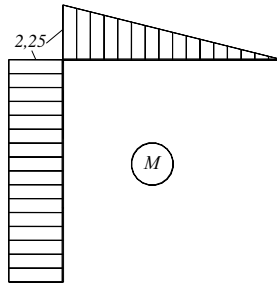


Рис. 29.

Проверка выполняется.

## 8. Рекомендуемая литература

1. Сопротивление материалов. А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин. - М.: Высш. шк. 8-е изд. испр. 2012 – 560 с.: ил.
2. Сопротивление материалов. В.И. Феодосьев. - 8-е изд., стереотип.- М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. - 560 с.: ил.
3. Сборник задач по сопротивлению материалов. Под ред. А. В. Александрова. – М.: Стройиздат, 1977. – 335 с: ил.
4. Сопротивление материалов. А.М. Лукьянов. – М.: Магистраль, 2008. - 560 с.: ил.
5. Механика материалов. С.П. Тимошенко, Дж. Гере. - М. Мир, 1976. – 670 с.: ил.
6. Сопротивление материалов. А.М. Михайлов. – М. Стройиздат, 1989. - 352 с.:ил.
7. Сопротивление материалов. П.А. Степин. - 7-е изд. стер.- М.: Высш. шк..1983. – 303с.: ил.
8. Сопротивление материалов. В.А. Копнов, С.Н. Кривошапко. – М.: Высш. шк., 2003. – 351 с.: ил.
9. Сопротивление материалов. Г.М. Ицкович. - 9-е изд. стер.- М.: Высш. шк..2001. – 368с.: ил.
10. Сборник задач по сопротивлению материалов. И.Е. Цетыркин. Учебное пособие - М.: МИИТ, 1968. – 106 с.: ил.

**Общие для всех задач данные**

Расчетное сопротивление прокатной стали: растяжению, сжатию и изгибу  $R = 210 \text{ МПа}$ , срезу  $R_{ср} = 130 \text{ МПа}$ .

Модули упругости и коэффициент Пуассона

Материал	Модули Упругости		Коэффициент Пуассона $\mu$
	$E; \text{ ГПа (кг/см}^2\text{)}$	$G; \text{ ГПа (кг/см}^2\text{)}$	
Сталь	200 ( $2 \cdot 10^6$ )	80 ( $8 \cdot 10^5$ )	0,3
Чугун	100 ( $1 \cdot 10^6$ )	45 ( $4,5 \cdot 10^5$ )	0,25
Медь	100 ( $1 \cdot 10^6$ )	40 ( $4 \cdot 10^5$ )	0,32
Алюминий	70 ( $0,7 \cdot 10^6$ )	27 ( $2,7 \cdot 10^5$ )	0,3
Дерево	10 ( $0,1 \cdot 10^6$ )	0,55 ( $0,055 \cdot 10^6$ )	-

Значения допускаемых напряжений для конструкционных материалов.

Материал	Значения $[\sigma]$ МПа, при	
	растяжении	сжатию
Сталь углеродистая	140-160	140-160
Сталь легированная	100-400	100-400
Чугун серый	28-80	120-150
Медь	30-120	30-120
Дюралюминий	80-150	80-150
Сосна вдоль волокон	7-10	10-12
Дуб вдоль волокон	9-13	13-15
Бетон	0,1-0,7	1-9

## Оглавление

Введение.....	3
1. Статически неопределимые балки.....	3
2. Каноническое уравнение метода сил.....	6
Пример 1.....	8
3. Внешне статически неопределимые рамы.....	12
Пример 2.....	13
4. Расчет дважды статически неопределимой рамы.....	16
Пример 3.....	21
5. Определение перемещений от температурных воздействий в статически определимых рамах.....	32
Пример 4.....	32
6. Расчет статически неопределимых рамах на тепловые воздействия.....	34
Пример 5.....	35
7. Расчет плоских статически неопределимых рамах на осадку опор.....	38
Пример 6.....	38
8. Рекомендуемая литература.....	41
Приложение.....	42
Оглавление.....	43

***Учебно-методическое издание***

Лукьянов Анатолий Михайлович, Лукьянов Михаил Анатольевич,  
Марасанов Александр Игоревич

## **Расчет статически неопределимых систем методом сил**

*Методические указания к выполнению домашнего задания по  
дисциплине «Сопротивление материалов»*

---

Подписано в печать 22.01 2015 Тираж 100 экз. Заказ № 1164  
Формат 60x84/16. Усл. печ. л.- 2,75. Изд. № 24-15

---

УГЦ ГИ МИИТ, Москва, 127994, ул. Образцова, д.9, стр. 9.