Задача 1

Стержень квадратного поперечного сечения со стороной квадрата равной a и длиной $2l$ изготовлен из изотропного упругого материала с модулем упругости E и коэффициентом Пуассона μ. Стержень вставляется в паз, сделанный точно по его размерам (см. рис.1.1).

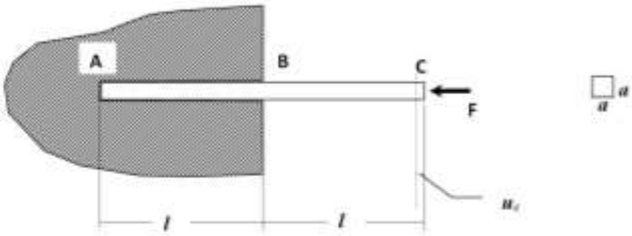


Рис.1.1

Материал, в котором сделан паз, следует считать абсолютно жестким. Трение по поверхности касания стержня и паза отсутствует. Определить перемещение точки C, которое вызовет приложение силы F.

Решение.

На участке A - B материал стержня не может расширяться в поперечном направлении, поэтому в стержне появятся поперечные напряжения, напряженное состояние здесь будет трехосным (см. рис. 1.2).

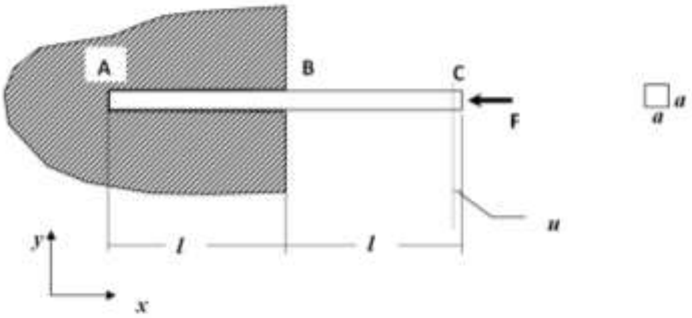


Рис. 1.2

Запишем обобщенный закон Гука для трехосного напряженного состояния:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu\frac{\sigma_y}{E} - \mu\frac{\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_y = -\mu\frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \mu\frac{\sigma_z}{E} \qquad (1)$$

$$\varepsilon_z = -\mu\frac{\sigma_x}{E} - \mu\frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}$$

В нашем случае $\varepsilon_y = 0$; $\varepsilon_z = 0$; $\sigma_y = \sigma_z = \sigma_п -$ поперечное напряжение. Подставляя эти значения в обобщенный закон Гука, получим:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu\frac{\sigma_п}{E} - \mu\frac{\sigma_п}{E}$$

$$0 = -\mu\frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_п}{E} - \mu\frac{\sigma_п}{E} \qquad (2)$$

$$0 = -\mu\frac{\sigma_x}{E} - \mu\frac{\sigma_п}{E} + \frac{\sigma_п}{E} \quad .$$

Из второй или из третьей строки уравнений (2) получим $\sigma_п = \mu\frac{\sigma_x}{(1-\mu)}$. Подставляя вместо $\sigma_п$ полученное значение в первую строку уравнений (2), получим:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu\frac{\mu\frac{\sigma_x}{(1-\mu)}}{E} - \mu\frac{\mu\frac{\sigma_x}{(1-\mu)}}{E} = \frac{\sigma_x}{E}(1 - \frac{2\mu^2}{(1-\mu)}).$$

Итак, получено выражение $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}(1 - \frac{2\mu^2}{(1-\mu)})$. , которое связывает продольное напряжение в стержне с продольной деформацией в условиях, когда поперечная деформация стеснена. Как видно деформация в этом случае получается несколько меньшей, чем в случае одноосного растяжения стержня. Поскольку по условию задачи трение по поверхности касания отсутствует, то во всех поперечных сечениях стержня продольная сила будет равна *-F* (стержень испытывает сжатие вдоль оси $\boldsymbol{x}$), соответственно напряжение сжатия окажется равным $\sigma_x = \frac{N}{A} = \frac{-F}{a^2}$. Теперь для участка стержня *A-B* величина продольной деформации получится равной:

$\varepsilon_x^{A-B} = \frac{-F}{a^2E}(1 - \frac{2\mu^2}{(1-\mu)})$. Умножая относительную деформацию на первоначальную длину участка, получим $\Delta l_{A-B} = \frac{-Fl}{a^2E}(1 - \frac{2\mu^2}{(1-\mu)})$.

Для участка *B-C* все значительно проще, так как здесь имеем обыкновенное одноосное сжатие $\varepsilon_x^{B-C} = \frac{\sigma}{E} = \frac{-F}{a^2E}$, соответственно $\Delta l_{B-C} = \varepsilon_x^{B-C} \cdot l = \frac{-Fl}{a^2E}$.

Поскольку левое сечение неподвижно, искомое смещение сечения *C* (см. рис. 1.2) будет равно сумме удлинений обоих участков стержня.

$$U_C = \Delta l_{A-B} + \Delta l_{B-C} = \frac{-Fl}{a^2E}\left(1 - \frac{2\mu^2}{(1-\mu)}\right) + \frac{-Fl}{a^2E} = \frac{-2Fl}{a^2E}(1 - \frac{\mu^2}{(1-\mu)}).$$

Знак минус указывает на то, что участки стержня укорачиваются, следовательно сечение *C* перемещается налево. **Ответ:** Перемещение сечения С равно: $U_C = \frac{-2Fl}{a^2E}\left(1 - \frac{\mu^2}{(1-\mu)}\right)$, сечение смещается налево.

Задача 2.

Фигура построена при помощи вписанного в круг квадрата (см. рис.2.1) и заполняет заштрихованную область. Радиус круга r . Определить момент инерции заданной фигуры относительно оси x .

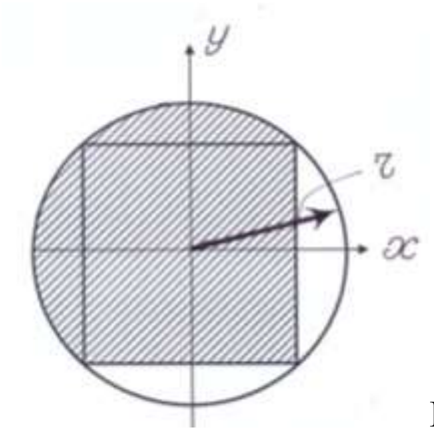


Рис. 2.1.

Решение.

Заданная фигура может быть получена из квадрата путем добавления к нему области, которая имеет двойную штриховку или из целого круга вычетанием из него области, которая не имеет штриховки на рисунке.

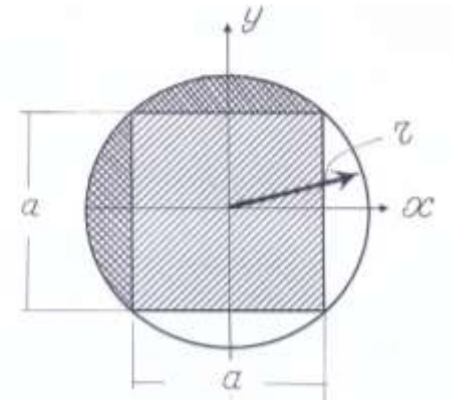


Рис. 2.2.

Момент инерции относительно оси x области, которая имеет двойную штриховку такой же , как и области, не заштрихованной на рисунке 2.2. Таким образом, искомый момент инерции равен среднему арифметическому между моментами инерции вписанного квадрата и круга.

$$I_x = \frac{1}{2}\left(I_x^{\text{круга}} + I_x^{\text{квадрата}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi r^4}{4} + \frac{a\,a^3}{12}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi r^4}{4} + \frac{r\sqrt{2}(\,r\sqrt{2})^3}{12}\right) = \frac{r^4}{2}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}\right) = 0{,}5594 r^4$$

Ответ: $I_x = \dfrac{r^4}{2}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{3}\right) = 0{,}5594 r^4$

Задача 3

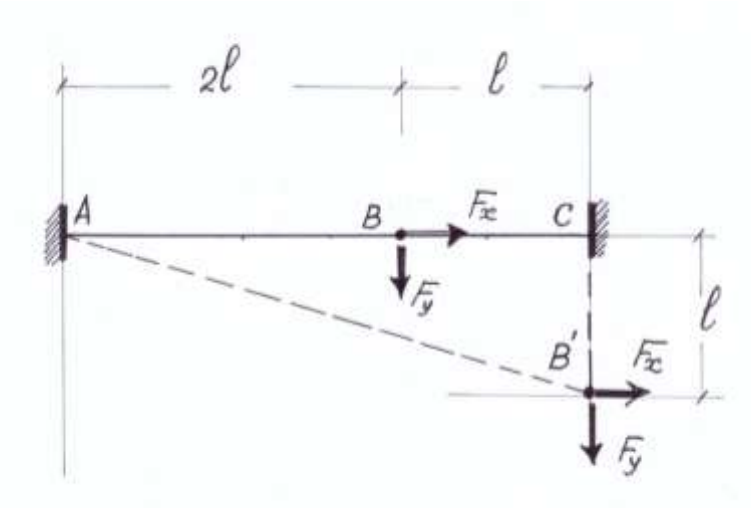


Рис.3.1

Упругая растяжимая нить, изготовленная из резины, занимает в ненапряженном состоянии положение ***A B C***. Какие силы F_x и F_y нужно приложить в точке ***B***, чтобы она переместилась в положение B/ (см. рис.3.1). При удлинении нити считать справедливым закон Гука ($\Delta\, l = \frac{Nl_0}{EA}$ (здесь $l_0 -$ длина нити при отсутствии продольной силы)) и при больших удлинениях . Собственный вес нити не учитывать.

Решение.

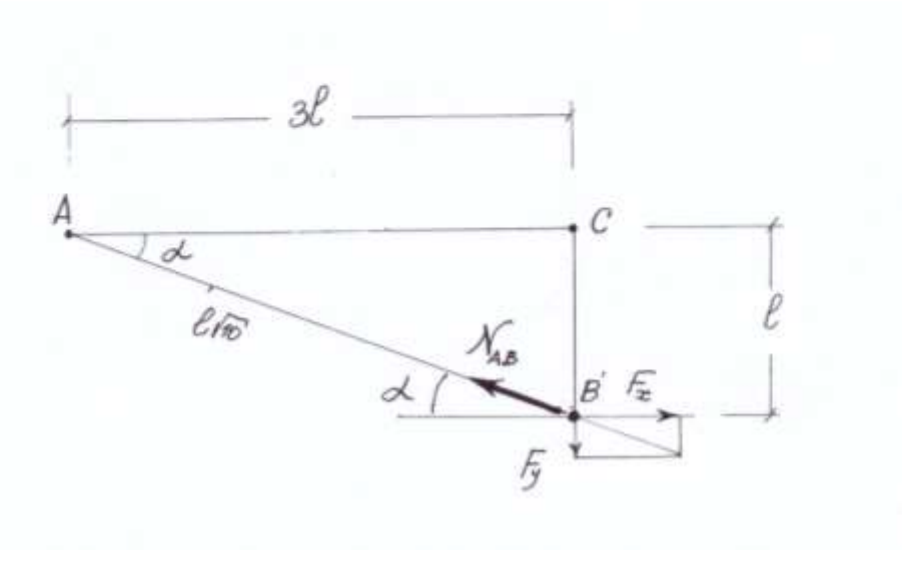


Рис. 3.2

Длина участка нити ***A B*** в растянутом состоянии (рис. 3.2)

$l_{AB} = \sqrt{(3l)^2 + l^2} = l\sqrt{10}$.

Удлинение участка ***A B***

$$\Delta l_{AB} = l_{AB} - 2l = l\sqrt{10} - 2l = l(\sqrt{10} - 2)$$

Продольную силу на участке ***A B*** найдем, используя закон Гука:

$$N_{AB} = \frac{\Delta l_{AB}}{l_{AB}^{o}} EA = \frac{l(\sqrt{10}-2)}{2l} EA = \frac{\sqrt{10}-2}{2} EA \ .$$

Участок ***B C*** нити в деформированном состоянии не изменил своей первоначальной длины, следовательно продольная сила в нем равна нулю.

Из условия равновесия узла ***B***

$$F_x = N_{AB} \cdot cos\alpha = \frac{\sqrt{10}-2}{2} EA \cdot \frac{3l}{l\sqrt{10}} = \frac{3(\sqrt{10}-2)}{2\sqrt{10}} EA \ ,$$

$$F_y = N_{AB} \cdot sin\alpha = \frac{\sqrt{10}-2}{2} EA \cdot \frac{l}{l\sqrt{10}} = \frac{(\sqrt{10}-2)}{2\sqrt{10}} EA \ .$$

<u>Ответ:</u>

$$F_x = \frac{3(\sqrt{10}-2)}{2\sqrt{10}} EA = 0{,}5513\ EA \ ,$$

$$F_y = \frac{(\sqrt{10}-2)}{2\sqrt{10}} EA = 0{,}1838 EA.$$

Задача 4.

Загружение круглого стержня (см. рис.4.1) по схеме а) вызывает угол поворота торцевого сечения $\varphi_z = 1{,}33 \cdot 10^{-3}$ радиан. Загружение по схеме б) вызывает угол поворота $\varphi_x = 10^{-3}$ радиан. Определить коэффициент Пуассона μ .

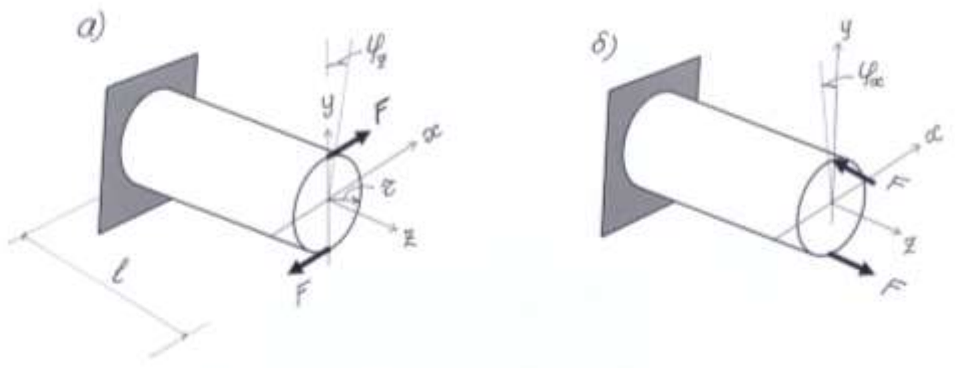


Рис. 4.1

Решение.

В случае а) стержень работает на кручение

$\varphi_z = \frac{M_{\text{кр}} l}{G I_\rho} = \frac{2Frl}{G I_\rho}$=1,33$\cdot 10^{-3}$. В случае б) пара сил вызывает изгиб и угол поворота φ_x получится путем умножения кривизны стержня $\frac{M_x}{E I_x}$ на длину стержня $\varphi_x = \frac{M_x l}{E I_x} = \frac{2Frl}{E I_x}$=1$\cdot 10^{-3}$. Таким образом имеем два равенства:

$$\frac{2Frl}{G I_\rho} = 1{,}33 \cdot 10^{-3}$$

$$\frac{2Frl}{E I_x} = 1 \cdot 10^{-3} .$$

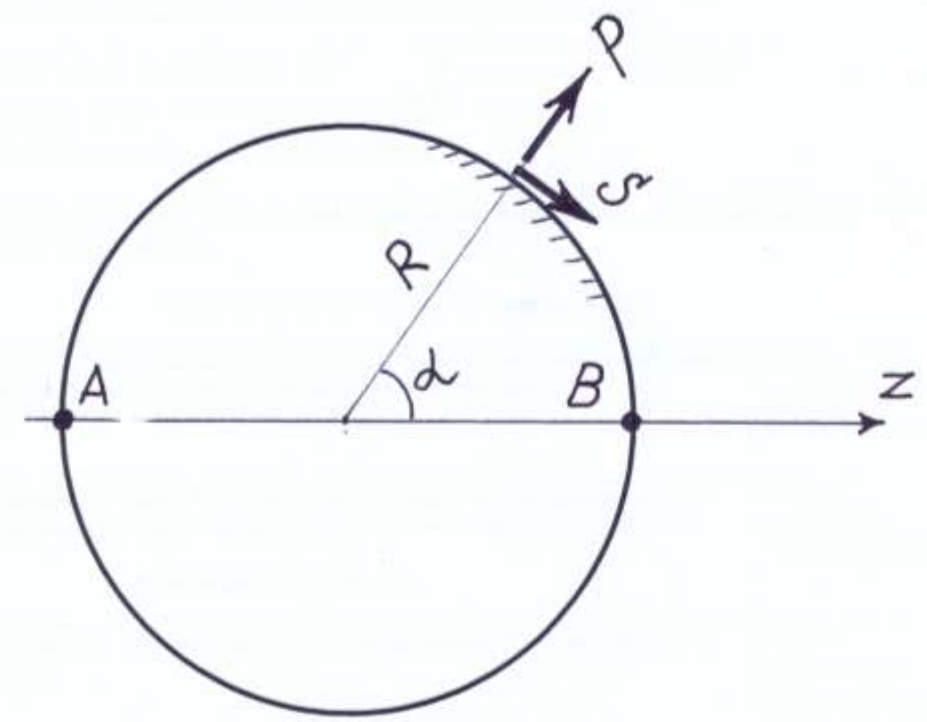
Приравняв отношение левых частей к отношению правых частей этих равенств, получим: $\frac{E I_x}{G I_\rho}$=1,33. (1)

Для круглого сечения $I_\rho = 2 I_x$. Модуль сдвига выражается через модуль упругости следующим образом: $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$. Подставляя эти значения в формулу (1), получим:

$\frac{E I_x}{\frac{E}{2(1+\mu)} 2 I_x}$=1,33. Откуда $1 + \mu = 1{,}33$. Следовательно $\mu = 0{,}33$.

Ответ: $\boldsymbol{\mu = 0{,}33}$.

Задача 5



Круглая пластинка постоянной толщины радиуса R загружена нормальными, распределенными на единицу площади границы, усилиями $p = p_0 cos^2\alpha$ и касательными усилиями $s = p_0 sin\alpha \cdot \cos\alpha$. Модуль упругости пластинки E . Определить удлинение отрезка **A B**.

Решение.

Имеем одноосное растяжение $\sigma_z = p_0$. Нагрузки p и s есть ни что иное, как напряжения в наклонных площадках при одноосном растяжении.

$$\Delta l_{AB} = \varepsilon_Z \cdot l_{AB} = \varepsilon_Z \cdot 2R = \frac{p_0}{E} 2R$$

Ответ:

$$\Delta l_{AB} = \frac{p_0}{E} 2R$$