

Московский государственный университет
путей сообщений (МИИТ)

Кафедра «Строительная механика»

РАСЧЕТ ТРЕХШАРНИРНОЙ АРКИ

Методические указания к практическим занятиям
по дисциплине «Строительная механика»
для студентов строительных специальностей

Москва - 2008

Московский государственный университет
путей сообщений (МИИТ)

Кафедра «Строительная механика»

Г.А. Нольде, М.А. Лукьянов

РАСЧЕТ ТРЕХШАРНИРНОЙ АРКИ

Рекомендовано редакционно-издательским
Советом университета в качестве
методического указания
для студентов строительных специальностей

под редакцией проф. В.Д.Потапова

Москва - 2008

УДК 624.07

Н 80

Нольде Г.А., Лукьянов М.А.. Расчет трехшарнирной арки. Методические указания под редакцией проф. В.Д. Потапова.– М.: МИИТ 2008. – 48 с.

Приведены примеры определения опорных реакций и внутренних усилий в трехшарнирной арке от неподвижной нагрузки. Указаны основные приемы построения линий влияния реакций и усилий в трехшарнирной арке.

Исходные данные

На рис.1 показана трехшарнирная арка с надарочным строением. Ось арки очерчена по квадратной параболе. Неподвижно равномерно распределенная нагрузка $q = 2 \text{ кН/м}$ и подвижная единичная сила $F = 1$ (при построении линий влияния) расположены на надарочном строении.

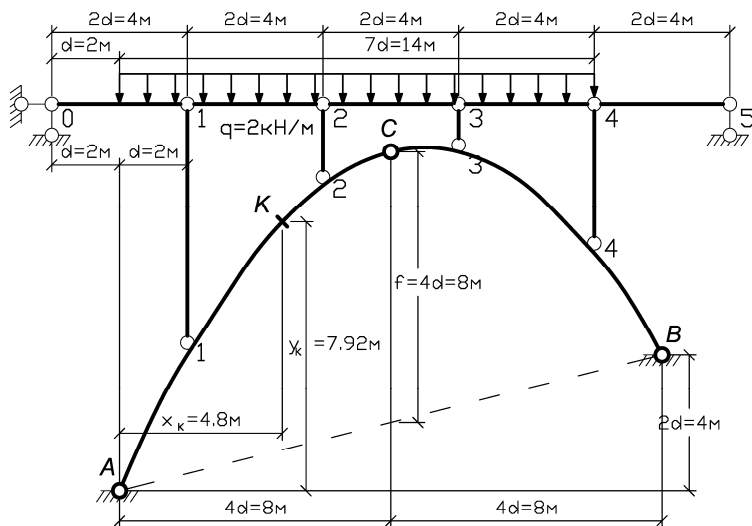


Рис.1

Требуется:

- 1) определить реакции и внутренние усилия в сечении K арки от неподвижной нагрузки q ,
- 2) построить линии влияния реакций и внутренних усилий в сечении K арки,
- 3) определить реакции и внутренние усилия от заданной неподвижной нагрузки q с помощью линий влияния,
- 4) определить экстремальные значения нормальных напряжений в сечении K от подвижной нагрузки q .

1. Определение геометрических характеристик арки

Запишем уравнение оси арки (рис.2) в общем виде

$$y = ax^2 + bx + c .$$

Коэффициенты a, b, c определим, используя координаты шарниров A, B, C :

1). $x_A = 0, y_A = 0, a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = 0$, откуда следует $c = 0$,

2). $x_C = 8, y_C = 10, a \cdot 8^2 + b \cdot 8 = 10$

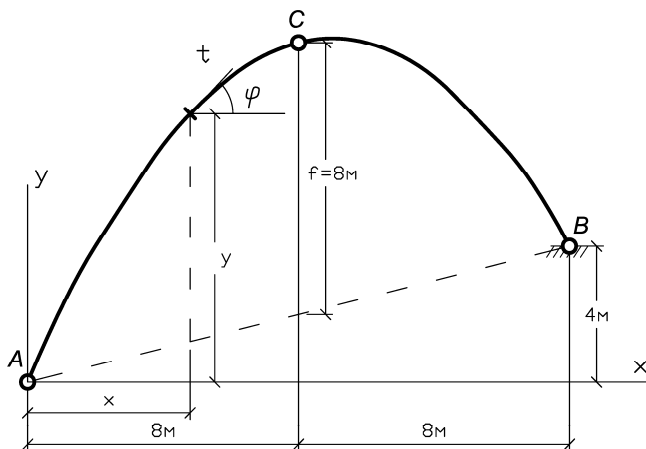


Рис.2

3). $x_B = 16, y_B = 4, a \cdot 16^2 + b \cdot 16 = 4$.

Решая систему двух уравнений

$$64a + 8b = 10 .$$

$$256a + 16b = 4 ,$$

найдем $a = -\frac{1}{8}, b = \frac{9}{4}$.

Окончательно получим $y = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{9}{4}x$.

Для дальнейшего расчета потребуется выражение первой производной $\frac{dy}{dx} = tg\varphi = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{4}$, где φ - угол между осью x и касательной к оси арки (рис.2).

Определим вертикальную координату сечения K и угол φ_K :

$$1. \quad x_K = 4.8, \quad y_K = -\frac{1}{8} \cdot 4.8^2 + \frac{9}{4} \cdot 4.8 = 7.92,$$

$$2. \quad tg\varphi_K = \left(\frac{dy}{dx}\right)_K = -\frac{1}{4} \cdot 4.8 + \frac{9}{4} = 1.05, \quad \varphi_K = 46.397^\circ,$$

$$\sin \varphi_K = 0.724, \quad \cos \varphi_K = 0.690.$$

Тригонометрические функции можно найти и по формулам

$$\cos \varphi_K = \sqrt{\frac{1}{1 + tg^2 \varphi_K}} = \sqrt{\frac{1}{1 + 1.05^2}} \approx 0.690,$$

$$\sin \varphi_K = \sqrt{\frac{tg^2 \varphi_K}{1 + tg^2 \varphi_K}} = \sqrt{\frac{1.05^2}{1 + 1.05^2}} \approx 0.724.$$

2. Расчет арки на неподвижную нагрузку

2.1. Замена распределенной нагрузки сосредоточенными силами

Распределенная неподвижная нагрузка q передается на арку через стойки в узлах 1,2,3,4 в виде сосредоточенных сил. Такая передача нагрузки называется узловой. Величины этих сосредоточенных сил равны реакциям в разрезной балке. Для замены распределенной нагрузки узловыми силами F_1, F_2, F_3, F_4 (рис.4) необходимо рассмотреть каждый из участков 0-1, 1-2, 2-3, 3-4 и 4-5 (рис.1) как балку на двух опорах. Значения реакций в этих балках приведены на рис.3. Определим узловую силу $F_1 = V_1^{ЛЕВ} + V_1^{ПРАВ}$ (рис3).

$$\sum m_0 = 0, \quad qd \cdot 1.5d - V_1^{ЛЕБ} \cdot 2d = 0,$$

$$V_1^{ЛЕБ} = 0.75qd, \quad V_1^{ПРАБ} = qd.$$

Таким образом, $F_1 = 0.75qd + qd = 1.75qd = 7$.

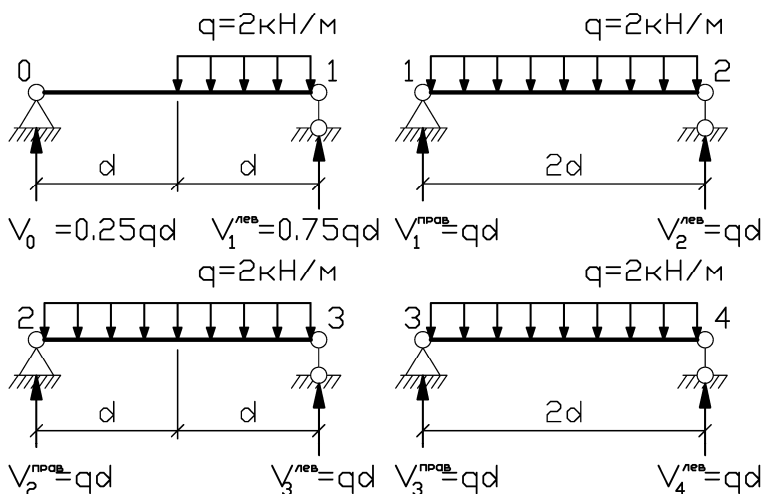


Рис.3

Аналогично определим узловые силы

$$F_2 = qd + qd = 2qd = 8,$$

$$F_3 = qd + qd = 2qd = 8,$$

$$F_4 = qd + 0 = qd = 4.$$

Вся нагрузка, которая действует непосредственно на арку, показана на рис.4.

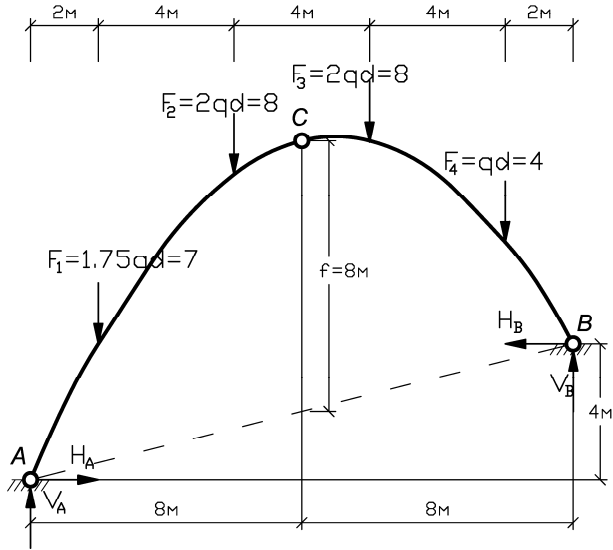


Рис.4

2.2. Определение опорных реакций

Составляя уравнения равновесия для системы: сумму моментов всех сил относительно шарнира A $\sum m_A = 0$ и сумму моментов правых сил относительно шарнира C $\sum m_C^{ПРАВ} = 0$ (рис.4), получим систему уравнений относительно неизвестных реакций V_B и H_B .

$$\sum m_A = 0, \quad V_B \cdot 16 + H_B \cdot 4 - 7 \cdot 2 - 8 \cdot 6 - 8 \cdot 10 - 4 \cdot 14 = 0,$$

$$\sum m_C^{ПРАВ.СИЛ} = 0; \quad V_B \cdot 8 - H_B \cdot 6 - 8 \cdot 2 - 4 \cdot 6 = 0.$$

Решая эту систему уравнений, получим

$$V_B \approx 10.531 \text{ кН}; \quad H_B = 7.375 \text{ кН}.$$

Реакции V_A и H_A определим, составив уравнения равновесия для системы:

сумму моментов всех сил относительно шарнира B

$$\sum m_B = 0 \text{ и сумму моментов левых сил относительно шарнира } C$$

$$\sum m_C^{ЛЕВ.} = 0.$$

$$\sum m_B = V_A \cdot 16 - H_A \cdot 4 - 4 \cdot 2 - 8 \cdot 6 - 8 \cdot 10 - 7 \cdot 14 = 0$$

$$\sum m_C^{ЛЕВ} = V_A \cdot 8 - H_A \cdot 10 - 8 \cdot 2 - 7 \cdot 6 = 0.$$

Решая эту систему уравнений, получим $V_A \approx 16.469$, $H_A = 7.375$.

Для проверки найденных реакций используем те условия равновесия, которые не применялись при их определении: $\sum x = 0$ и $\sum y = 0$ всех сил, действующих на арку.

$$\sum x = 0; \quad H_A - H_B = 0; \quad H_A = H_B = 7.375. \quad \sum y = 0;$$

$$16.469 + 10.531 - 7 - 8 - 8 - 4 \equiv 0.$$

Оба уравнения равновесия удовлетворяются. Значит, реакции найдены правильно.

Замечание – при расчете следует делать округления с точностью до 3 - 4 значащих цифр после запятой.

2.3. Определение внутренних усилий в сечении K

Для определения внутренних усилий M_K , Q_K , N_K в сечении K используем метод сечений. Правило знаков - поперечные силы Q положительны, если они вращают элементарный участок арки по часовой стрелке; нормальное усилие N положительно, если оно растягивает ось арки; изгибающие моменты M положительны, если растягивают нижние волокна арки.

Составим уравнения равновесия для левой отсеченной части арки под действием внешних нагрузок и внутренних усилий (рис.5)

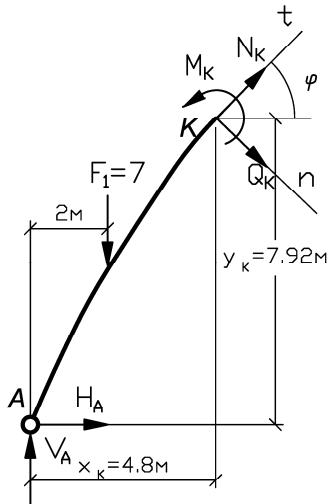


Рис.5

1. $\sum m_K^{IEB} = 0$; $M_K - V_A \cdot x_K + H_A \cdot y_K + F_1 \cdot (x_K - 2) = 0$;
 $M_K = 16.469 \cdot 4.8 - 7.375 \cdot 7.92 - 7 \cdot (4.8 - 2) = 1.041(\kappa Hm)$.
2. $\sum n^{IEB} = 0$; $Q_K - (V_A - F_1) \cdot \cos \varphi_K + H_A \cdot \sin \varphi_K = 0$;
 $Q_K = (16.469 - 7) \cdot 0.690 - 7.375 \cdot 0.724 = 1.194(\kappa H)$.
3. $\sum t^{IEB} = 0$; $N_K + (V_A - F_1) \cdot \sin \varphi_K + H_A \cdot \cos \varphi_K = 0$;
 $N_K = (-16.469 + 7) \cdot 0.724 - 7.375 \cdot 0.690 = -11.944(\kappa H)$.

3. Расчет арки на подвижную нагрузку

При построении линии влияния любого фактора в случае узловой передачи нагрузки сначала строится линия влияния этого фактора при движении единичной силы $F = 1$ непосредственно по арке, а потом учитывается узловая передача нагрузки путем построения передаточных прямых.

3.1. Построение линий влияния реакций и внутренних усилий при движении единичной силы непосредственно по самой арке

3.1.1. Линия влияния вертикальной реакции V_A

Рассмотрим положение единичной подвижной силы $F = 1$ левее шарнира C на расстоянии x от опоры A (рис.6). При таком положении силы F известно направление реакции R_B - линия ее действия совпадает с прямой CB (только при этом условии момент правых сил относительно шарнира C равен нулю). Используем это обстоятельство, составив условие равновесия – сумму моментов относительно точки E , в которой пересекаются линии действия реакций R_B и H (рис.6).

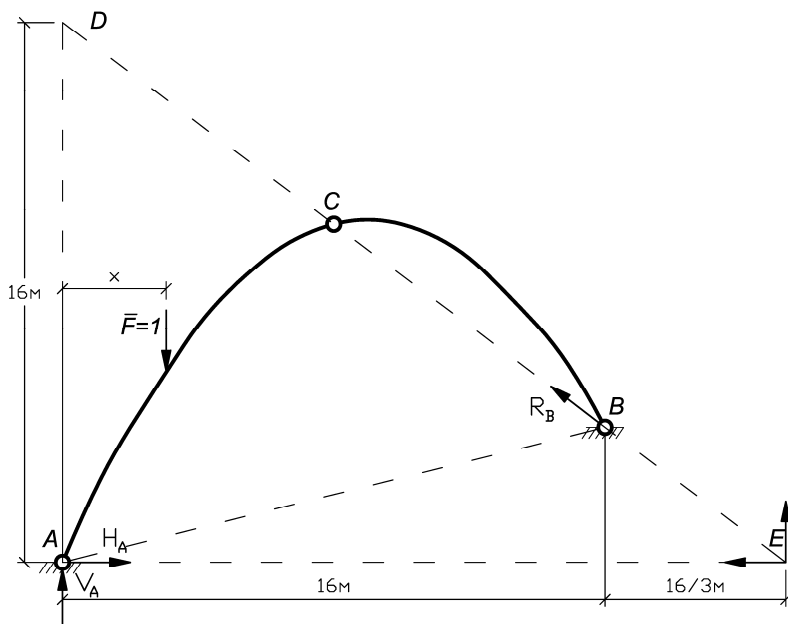


Рис.6

$$\sum m_E = 0; \quad V_A \cdot \left(16 + \frac{16}{3}\right) - 1 \left(16 + \frac{16}{3} - x\right) = 0;$$

$$V_A = 1 - \frac{3}{64}x . \quad \text{Для}$$

построения полученной прямой достаточно найти значения V_A для двух положений силы $F = 1$: в т. А
 $x = 0, V_A = 1$; в т. С
 $x = 8, V_A = 5/8$. По этим

ординатам строим левую прямую $A'C'$ линии влияния V_A (левее шарнира C) (рис.8,а). Обратим внимание, что эта прямая пересекается с нулевой линией под точкой E (рис.8,а).

Рассмотрим положение силы $F = 1$ правее шарнира C на расстоянии x от опоры A (рис.7). Теперь известно направление реакции R_A - вдоль линии AC . Разложим реакцию R_A на две составляющие V_A и H_A в точке O - точке пересечения линии действия реакции R_A и горизонтальной составляющей H реакции на опоре B . Составим уравнение равновесия

$$\sum m_B = 0; \quad V_A \cdot 12.8 - 1(16 - x) = 0;$$

$$V_A = (16 - x) / 12.8$$

Ординаты линии влияния V_A при положении силы $F = 1$:

в т. С $x = 8, V_A = 8/12.8 = 5/8$;

в т. В $x = 16, V_A = 0$.

По этим ординатам строим правую прямую $C'B'$ линии влияния V_A (правее шарнира C) (рис.8,а).

Таким образом, основным положением силы $F = 1$ при построении линии влияния V_A является участок левее шарнира C . Построив линию влияния на этом участке, ее можно достроить, соединив прямой линией ординату под шарниром C с нулевой ординатой, соответствующей положению силы $F = 1$ на опоре B .

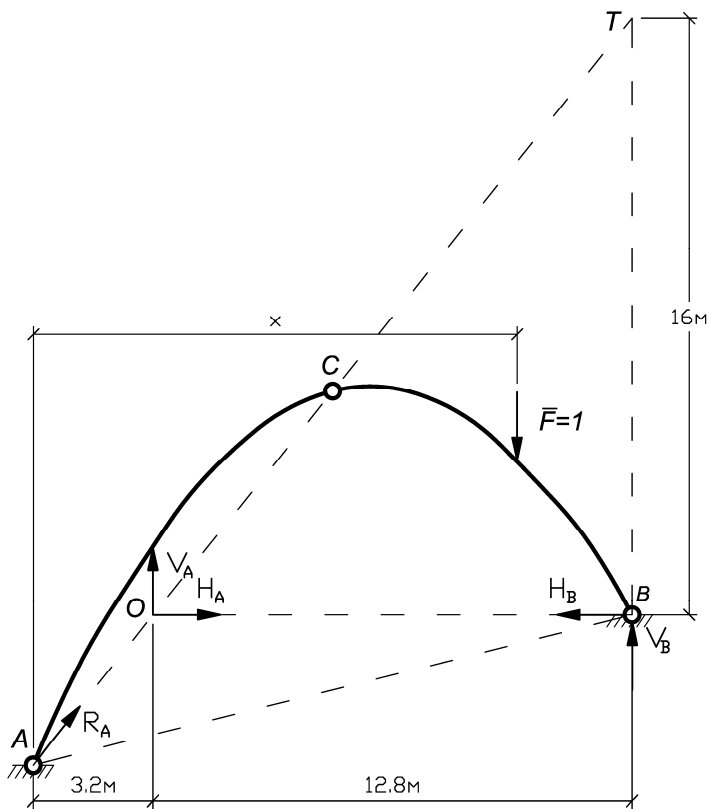


Рис.7

3.1.2. Линия влияния вертикальной реакции V_B

Если линия влияния вертикальной реакции V_A построена, то проще всего получить уравнение линии влияния V_B из условия

$$\sum y = 0 \text{ (рис.6, рис.7)}$$

$$V_A + V_B - 1 = 0 ,$$

откуда при любом положении силы $F = 1$ $V_B = 1 - V_A$.

По этому выражению строим линию влияния V_B (рис.8,б).

Другим способом построения линии влияния V_B можно отметить путь, аналогичный построению линии влияния V_A .

Сначала рассматриваем положение груза $F = 1$ правее шарнира C (рис.7), реакция R_A в этом случае действует по линии AC . Из условия

$$\sum m_o = 0 ; V_B \cdot 12.8 - 1 \cdot (x - 3.2) = 0 \text{ получим}$$

$$V_B = (x - 3.2)/12.8 \quad \text{Ординаты}$$

линии влияния V_B при положении силы $F = 1$:

в т. С $x = 8, V_B = 3/8,$

в т. В $x = 16, V_B = 1.$

Далее на участке левее шарнира C достраиваем линию влияния V_B , соединив прямой линией $A'C'$ ординату под шарниром C с нулевой ординатой, соответствующей положению силы $F = 1$ на опоре A (рис.8,б).

3.1.3 Линия влияния распора $H_A = H_B = H$

Рассмотрим положение силы $F = 1$ левее шарнира C (рис.5). В точке D пересекаются линии действия реакций V_A и R_B . Для определения распора H используем уравнение равновесия $\sum m_D = 0$.

$$H_A \cdot 16 - 1 \cdot x = 0, \text{ откуда имеем } H_A = H = x/16.$$

Ординаты линии влияния H при положении силы $F = 1$: в

т. А $x = 0, H = 0$; в т. С $x = 8, H = 1/2$.

По этим ординатам строим левую прямую $A'C'$ линии влияния H (рис.8,в).

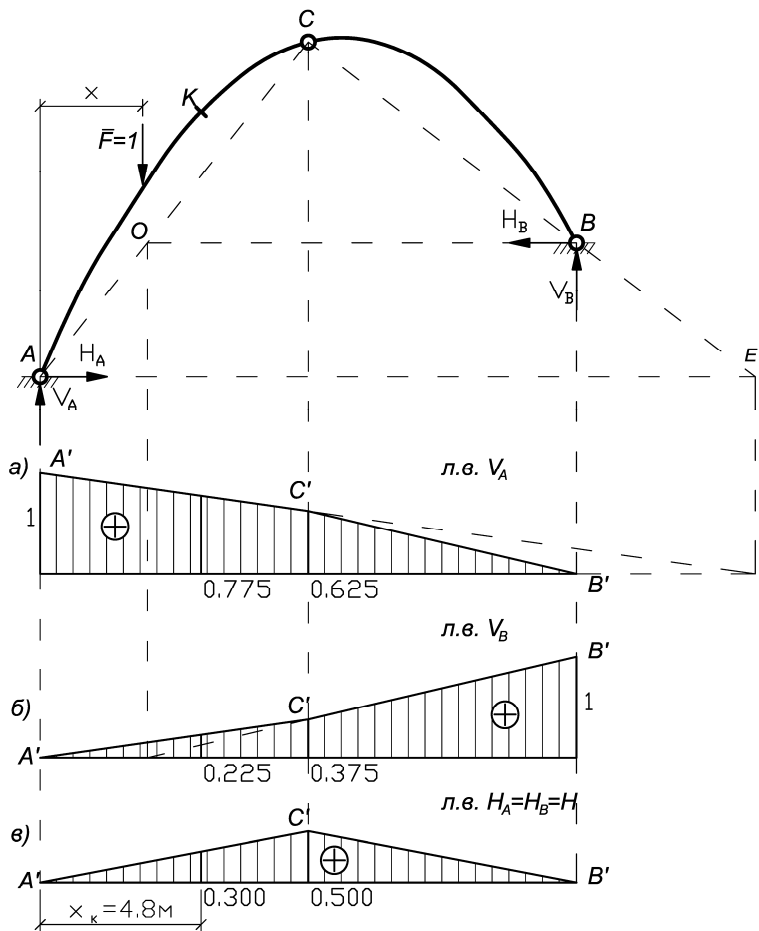


Рис.8

Рассмотрим положение силы $F = 1$ правее шарнира C (рис.6). В этом случае проще определить H на правой опоре B . Для этого составим уравнение равновесия $\sum m_T = 0$ (в точке T пересекаются линия действия реакции V_B и реакция R_A , действующая по линии AC).

$$H_B \cdot 16 - 1 \cdot (16 - x) = 0,$$

откуда $H_B = H_A = H = 1 - \frac{x}{16}$.

По этому выражению определяем ординаты линии влияния H при положении силы $F = 1$:

в т. C $x = 8$, $H = 1/2$; в т. B $x = 16$, $H = 0$.

Строим правую прямую $C'B'$ линии влияния H (рис.8,в).

Хорошим контролем ординат линий влияния V_A , V_B , $H_A = H_B$ является положение силы $F = 1$ над шарниром C , показанное на рис.9.

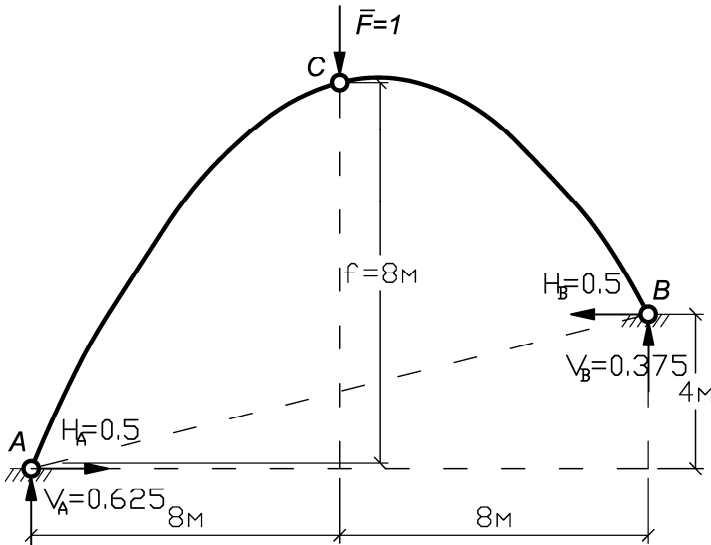


Рис.9

Значения реакций $V_A = 5/8$, $V_B = 3/8$, $H_A = H_B = 1/2$, указанные на этом рисунке, взяты с соответствующих линий влияния (ординаты под т. C). Проверяем условия равновесия:

$$\sum m_C^{ЛЕВ} = V_A \cdot 8 - H_A \cdot 10 = \frac{5}{8} \cdot 8 - \frac{1}{2} \cdot 10 = 0;$$

$$\sum m_C^{IPAB} = V_B \cdot 8 - H_B \cdot 6 = \frac{3}{8} \cdot 8 - \frac{1}{2} \cdot 6 = 0.$$

Условия равновесия выполняются.

3.1.4. Построение линии влияния M_K (изгибающего момента в сечении K)

Рассмотрим два положения силы $F = 1$ - правее сечения K и левее сечения K .

В обоих случаях будем рассматривать равновесие левой отсеченной части (рис.10,а) и (рис.10,б), т.е. для построения линий влияния внутренних усилий в сечении K будем использовать построенные линии влияния опорных реакций V_A и H .

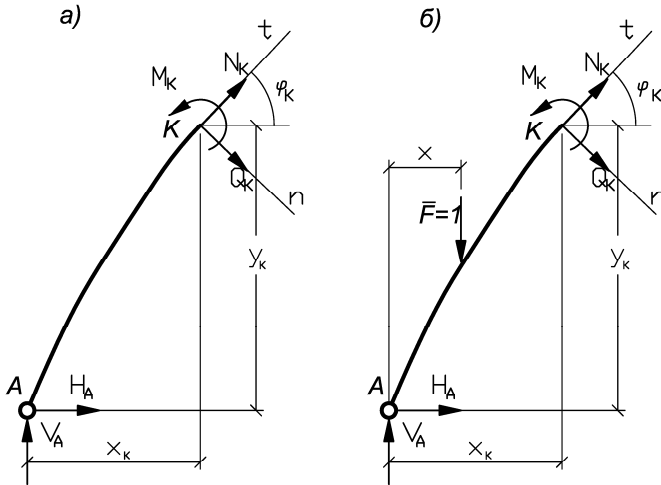


Рис.10

Положение силы $F = 1$ правее K (рис.10,а)

$$\sum m_k^{\text{лев.сил}} = 0; \quad M_K = V_A \cdot x_K - H_A \cdot y_K; \quad (1)$$

$$M_K = V_A \cdot 4.8 - H_A \cdot 7.92.$$

Этому выражению соответствуют две прямые: первая правая прямая на участке $K - C$ и вторая правая прямая на участке $C - B$.

Ординаты линии влияния

M_K при положении силы $F = 1$:

в т. K $M_K = 0.775 \cdot 4.8 - 0.300 \cdot 7.92 = 1.344$ (м); в

т. C $M_K = 0.625 \cdot 4.8 - 0.500 \cdot 7.92 = -0.960$ (м);

в т. B $M_K = 0 \cdot 4.8 - 0 \cdot 7.92 = 0$.

По этим ординатам строим линию влияния M_K , соответствующую положению силы $F = 1$ правее сечения K (рис.11,а).

Положение силы $F = 1$ левее K (рис.10,б)

$$\sum m_k^{\text{лев.сил}} = 0; \quad M_K = V_A \cdot x_K - H_A \cdot y_K - 1 \cdot (x_K - x);$$

(2)

$$M_K = V_A \cdot 4.8 - H_A \cdot 7.92 - 1 \cdot (4.8 - x). \quad \text{Ординаты}$$

линии влияния M_K при положении силы $F = 1$:

в т. K $x = 4.8$,

$$M_K = 0.775 \cdot 4.8 - 0.300 \cdot 7.92 - 1(4.8 - 4.8) = 1.344 \text{ (м);}$$
 в

т. A $x = 0$, $M_K = 1 \cdot 4.8 - 0 \cdot 7.92 - 1 \cdot (4.8 - 0) = 0$.

Эти же ординаты (при положении силы $F = 1$ левее сечения K) можно получить, рассматривая равновесие правой отсеченной части

$$\sum m_k^{\text{прав.сил}} = 0; \quad M_K = V_B \cdot 11.2 - H_B \cdot 3.92.$$

По найденным ординатам строим левую прямую $A'K'$ линии влияния M_K при положении силы $F = 1$ левее сечения

K (рис.11,а). Заметим, что ординаты левой и первой правой прямых в точке K равны, т.е. левая и первая правая прямые пересекаются под моментной точкой K .

Проверим графически положение силы $F = 1$, при котором $M_k = 0$ (нулевая ордината линии влияния M_K). Для рассматриваемой арки изгибающий момент в сечении K равен нулю, если сила $F = 1$ расположена в точке m участка KC на расстоянии x_0^M от опоры A (рис.11,а). Над этой точкой m

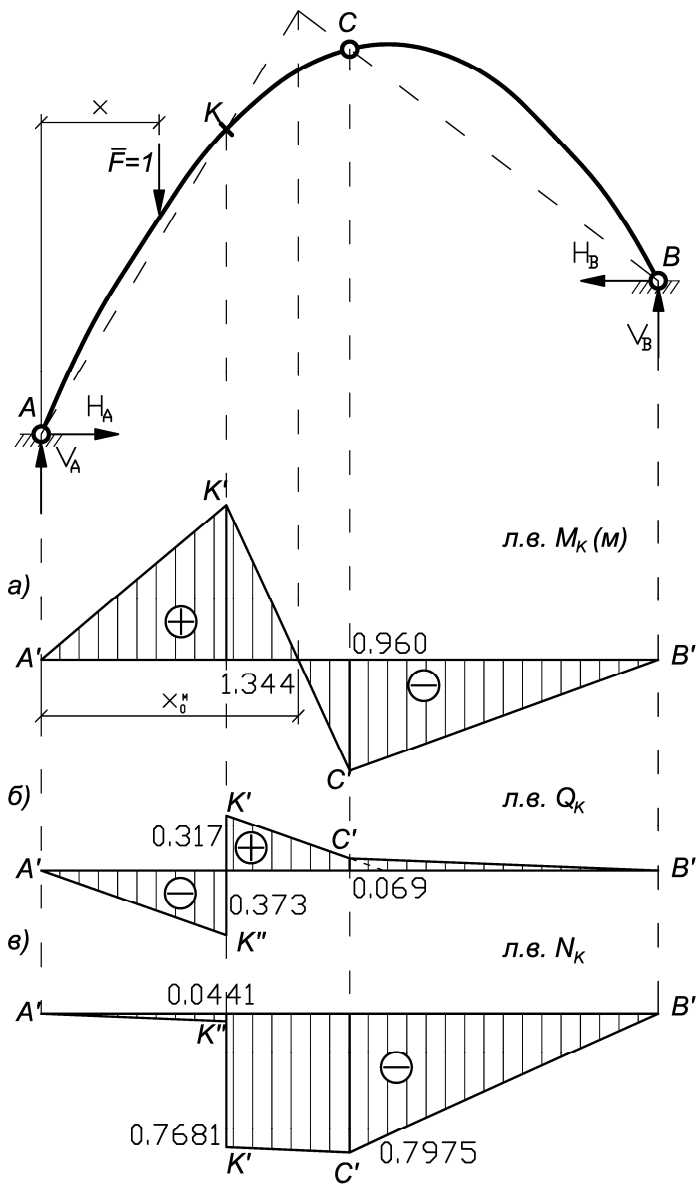


Рис.11

пересекаются линия действия реакции R_B , проходящая через шарнир C , и реакция R_A , действующая по линии AK . Обратим внимание, что основным положением силы $F = 1$ при построении линии влияния M_K является участок правее K .

Построив линию влияния на этом участке, ее можно достроить, соединив ординату под т. K с нулевой ординатой, соответствующей положению силы $F = 1$ на опоре A .

Другим способом построения линии влияния изгибающего момента M_K является «способ нулевой точки». На рис.12 показано построение линии влияния M_K этим способом.

Рассмотрим положение силы $F = 1$ на участке KC . При этом она находится правее сечения K , поэтому справедливо выведенное ранее для этого случая выражение (1)

$$M_K = V_A \cdot x_K - H_A \cdot y_K.$$

Линия влияния M_K на участке KC очерчивается прямой линией.

Для ее построения найдем ординаты в двух точках. Сначала рассмотрим положение силы $F = 1$ в точке A

$$M_K = 1 \cdot x_K - 0 \cdot y_K = x_K = 4.8$$

Эта ордината является вспомогательной, так как указанное выше выражение для M_K справедливо при положении силы $F = 1$, приложенной правее сечения K , а точка A находится левее сечения. Эта ордината нужна только для построения первой правой прямой.

Определим x_0^M - положение нулевой ординаты линии влияния

M_K . Арка находится под действием трех сил: реакций R_A , R_B и единичной силы F . Равновесие арки соблюдается, если линии действия этих сил пересекаются в одной точке. Найдем положение силы F , при котором изгибающий момент в сечении K равен нулю. При положении силы $F = 1$ на участке KC линия действия реакции R_B проходит через шарнир C . Чтобы момент

$M_K = -R_A \cdot h$ (рис.13) равнялся нулю, линия действия реакции R_A должна проходить через сечение K . В этом случае плечо h реакции R_A относительно сечения K (рис.13) оказывается равным

нулю. Пересечение этих направлений реакций R_A и R_B определяет положение силы $F = 1$, при котором $M_K = 0$ - точка m (рис.12). Формулу для определения x_0^M легко получить, если составить уравнения прямых линий AK и BC (рис.12).

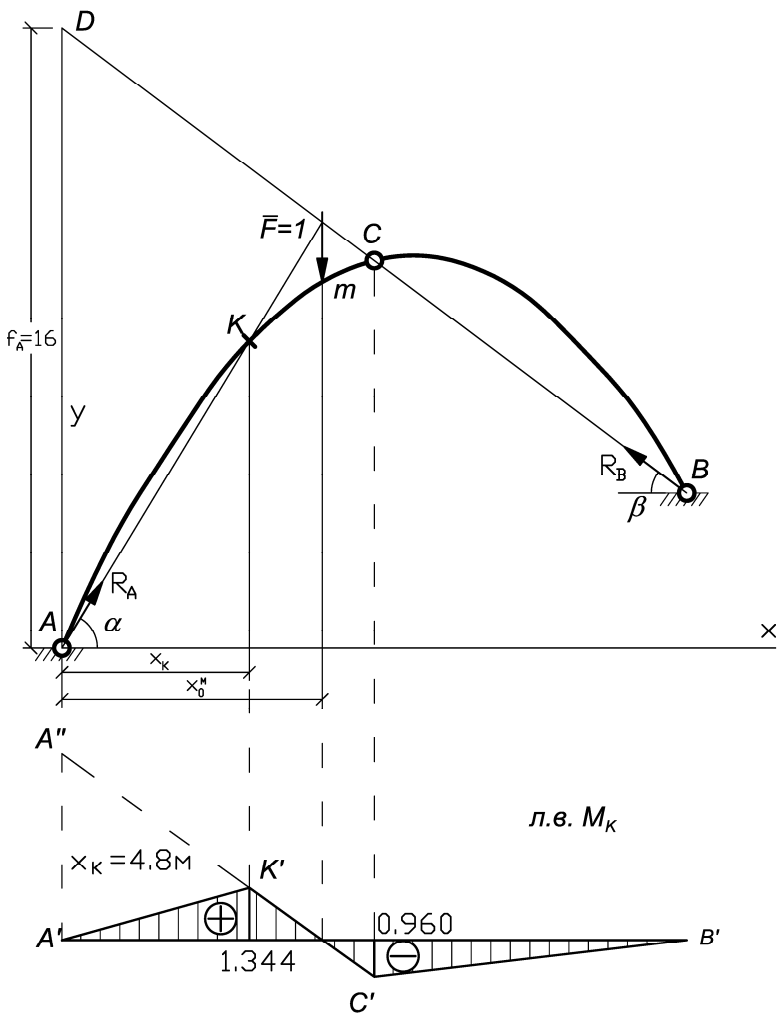


Рис.12

Прямая AK (направление R_A) $y = x \cdot \operatorname{tg} \alpha$; прямая BC (направление R_B) $y = f_A - x \cdot \operatorname{tg} \beta$; если $x = x_0^M$, то эти ординаты y равны. Это означает, что прямые пересекаются.

$$x_0^M \cdot \operatorname{tg} \alpha = f_A - x_0^M \cdot \operatorname{tg} \beta, \text{ откуда следует } x_0^M = \frac{f_A}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}.$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{6}{8} = 0.75,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_K}{x_K} = \frac{7.92}{4.8} = 1.65, f_A = 2 \cdot f = 2 \cdot 8 = 16$$

(рис.12,а).

$$\text{Определим } x_0^M = \frac{16}{(1.65 + 0.75)} = \frac{20}{3} = 6.66(6).$$

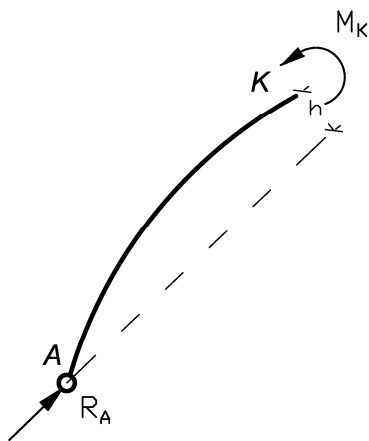


Рис.13

Вспомогательную ординату $x_K = 4.8$ в точке A и нулевую ординату на расстоянии $x_0^M = 6.66(6)$ в точке m' соединяем прямой линией и продолжаем до точки C' (рис.12). Эта прямая справедлива на участке KC , поэтому на этом участке первую правую прямую $K'C'$ проводим сплошной линией. Зная x_0^M и вспомогательную ординату $M_K = 4.8$ в точке A , определим

значения ординат линии влияния M_K при положении силы $F = 1$ в точках K и C (рис.12):

$$\text{в т. } K \quad M_K = \frac{4.8}{x_0^M} \cdot (x_0^M - x_K) = \frac{4.8}{6.666} \cdot (6.666 - 4.8) = 1.344 ;$$

в т. C

$$M_K = \frac{4.8}{x_0^M} \cdot (x_0^M - 8) = \frac{4.8}{6.666} \cdot (6.666 - 8) = -0.960$$

Завершаем построение линии влияния M_K , соединив ординату под точкой C с нулем под точкой B второй правой прямой $C'B'$ и соединив ординату под точкой K с нулем под точкой A левой прямой $A'K'$.

Окончательно

$A' - K' - C' - B'$ - линия влияния M_K при движении силы $F = 1$ непосредственно по арке (рис.11,а; рис.12).

3.1.5. Построение линии влияния Q_K (поперечной силы в сечении K)

Так же, как и при построении линии влияния M_K , рассмотрим два положения силы $F = 1$ – правее сечения K и левее сечения K (рис.10,а,б).

Положение силы $F = 1$ правее K (рис.10,а)

$$\sum n^{\text{ЛЕВ.СИЛ}} = 0 ;$$

$$Q_K = V_A \cdot \cos \varphi_K - H_A \cdot \sin \varphi_K ; \quad (3)$$

$$Q_K = V_A \cdot 0.690 - H_A \cdot 0.724 .$$

Так же, как и при построении линии влияния M_K , найдем ординаты линии влияния Q_K для трех положений силы $F = 1$ - в точках B, C и бесконечно близко к сечению K , но правее от него.

$$\text{в т. } K_{(+0)} \quad Q_K = 0.775 \cdot 0.690 - 0.300 \cdot 0.724 = 0.317 ;$$

$$\text{в т. } C \quad Q_K = 0.625 \cdot 0.690 - 0.500 \cdot 0.724 = 0.069 ;$$

в т. В $Q_K = 0$.

По этим ординатам строим линию влияния Q_K при положении силы $F = 1$ правее сечения K - первую правую прямую $K'C'$ и вторую правую прямую $C'B'$ (рис.11,б).

$$\begin{aligned} & \text{Положение силы } F = 1 \text{ левее } K \text{ (рис.10,б)} \\ & \sum n^{\text{ЛЕВ.СИЛ}} = 0; \end{aligned}$$

$$Q_K = (V_A - 1) \cdot \cos \varphi_K - H_A \cdot \sin \varphi_K; \quad (4)$$

$$Q_K = (V_A - 1) \cdot 0.690 - H_A \cdot 0.724.$$

Для построения прямой линии, описываемой этим выражением, рассмотрим два положения силы $F = 1$: в точке A и бесконечно близко к сечению K , но слева от него.

$$\text{В т. } A \quad Q_K = (1 - 1) \cdot 0.690 - 0 \cdot 0.724 = 0;$$

$$\text{в т. } K_{(-0)} \quad Q_K = (0.775 - 1) \cdot 0.690 - 0.300 \cdot 0.724 = 0.373.$$

По найденным ординатам строим линию влияния Q_K при положении силы $F = 1$ левее сечения K - левую прямую $A'K''$.

Окончательно $A' - K'' - K' - C' - B'$ - линия влияния поперечной силы Q_K при движении груза $F = 1$ непосредственно по арке (рис. 11,б).

Отметим следующие характерные особенности линии влияния Q_K - 1) в сечении K наблюдается скачок, численно равный $\cos \varphi_K = 0.690$; 2) левая прямая $A'K''$ и первая правая прямая $K'C'$ параллельны между собой.

Другим способом построения линии влияния Q_K является «способ нулевой точки». На рис.14 показано построение линии влияния Q_K этим способом.

Рассмотрим положение силы $F = 1$ на участке KC . Для этого случая (сила $F = 1$ правее K) справедливо полученное ранее выражение (3) $Q_K = V_A \cdot \cos \varphi_K - H_A \cdot \sin \varphi_K$. Подсчитаем вспомогательную ординату линии влияния Q_K при положении

силы $F = 1$ точке A

$$Q_K = 1 \cdot \cos \varphi_K - 0 \cdot \sin \varphi_K = \cos \varphi_K = 0.690.$$

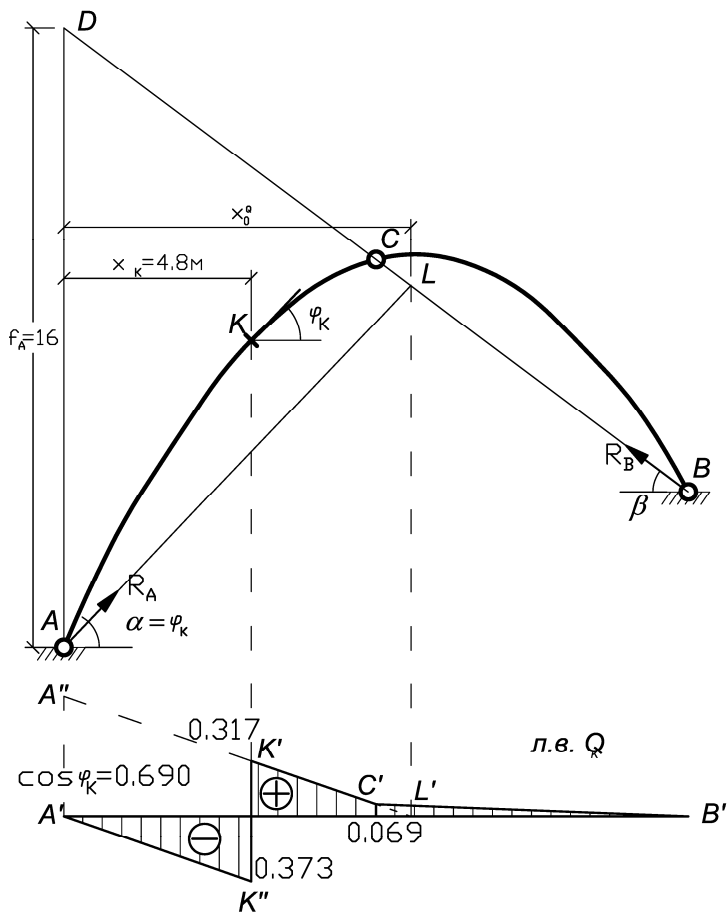


Рис.14

Определим положение нулевой ординаты линии влияния Q_K - расстояние x_0^Q . При положении силы $F = 1$ на участке KC реакция R_B действует по линии BC . Для того, чтобы поперечная

сила $Q_K = R_A \cdot \cos \gamma$ (рис.15) равнялась нулю, линия действия реакции R_A должна быть параллельна касательной t . В этом случае $\cos \gamma$ обращается в нуль (рис.15).

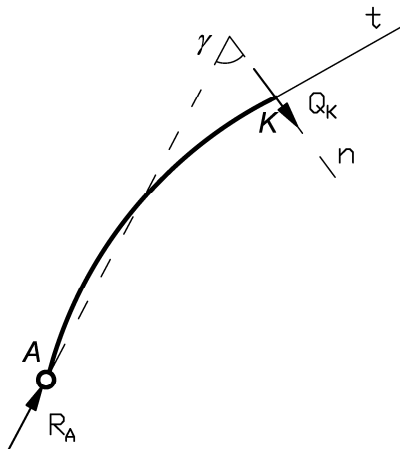


Рис.15

Пересечение этих направлений реакций R_A и R_B (точка L) определяет положение силы $F = 1$, при котором $Q_K = 0$ (рис.14). Расстояние x_0^O находится по той же формуле, что и расстояние x_0^M для линии влияния M_K ,

$$x_0^O = \frac{f_A}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}.$$

Здесь β - угол наклона реакции R_B , действующей по линии BC , $\operatorname{tg} \beta = 0.75$; α - угол наклона реакции R_A , линия действия которой параллельна касательной t , $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \varphi_K = 1.05$.

Определяем $x_0^O = 16 / (1.05 + 0.75) = 80 / 9 = 8.88(8)$.

Нулевая ордината – вспомогательная. Она нужна только для построения первой правой прямой на участке KC .

Соединяем вспомогательную ординату $A'A'' = \cos \varphi_K = 0.690$ под точкой A с нулевой вспомогательной ординатой под точкой L прямой линией (рис.14). На участке $K'C'$ (первая правая прямая) проводим сплошной линией и линию влияния на участке KC заштриховываем. Подсчитаем ординаты при положении силы $F = 1$ в точках K и C :

$$\text{т. } K \quad Q_K = \frac{0.690}{x_0^O} \cdot (x_0^O - x_K) = \frac{0.690}{8.888} \cdot (8.888 - 4.8) = 0.317;$$

т. C

$$Q_K = \frac{0.690}{x_0^O} \cdot (x_0^O - 8) = \frac{0.690}{8.888} \cdot 0.888 = 0.069.$$

Ординату при положении силы $F = 1$ в точке B можно определить по той же формуле (3)

$$Q_K = V_A \cdot \cos \varphi_K - H_A \cdot \sin \varphi_K = 0 \cdot 0.690 - 0 \cdot 0.724 = 0.$$

Проводим вторую правую прямую $C'B'$.

При положении силы $F = 1$ левее сечения K на участке AK поперечную силу можно определить по полученной ранее формуле (4). Сравнивая выражение (4) с выражением (3), обращаем внимание на то, что на участках AK и KC линия влияния Q_K очерчивается двумя прямыми, параллельными между собой и сдвинутыми одна относительно другой на постоянную величину $\cos \varphi_K = 0.690$. В таком случае для построения левой прямой достаточно рассмотреть положение единичной силы только в т. A (ордината линии влияния Q_K очевидно в этом случае равна нулю). Далее проводим левую прямую AK'' , параллельную первой правой прямой $K'C'$. Таким образом, $A' - K'' - K' - C' - B'$ - линия влияния Q_K при движении силы $F = 1$ непосредственно по арке (рис.11,б; рис.14).

3.1.6. Построение линии влияния N_K (продольной силы в сечении K)

Так же, как и при построении линий влияния M_K , Q_K , рассмотрим два положения силы $F = 1$ – правее сечения K и левее сечения K (рис.10,а,б).

Положение силы $F = 1$ правее K (рис.10,а)

$$\sum t^{\text{ЛЕВ.СИЛ}} = 0;$$

$$N_K = -V_A \cdot \sin \varphi_K - H_A \cdot \cos \varphi_K; \quad (5)$$

$$N_K = -V_A \cdot 0.724 - H_A \cdot 0.690.$$

Так же, как и при построении линии влияния Q_K , найдем ординаты для трех положений единичной силы F - в точках B , C и бесконечно близко к сечению K , но правее от него.

В т. $K_{(+0)}$ $N_K = -0.775 \cdot 0.724 - 0.300 \cdot 0.690 = -0.7681;$

в т. C $N_K = -0.625 \cdot 0.724 - 0.500 \cdot 0.690 = -0.7975;$

в т. B $N_K = 0.$

По этим ординатам строим линию влияния N_K при положении силы $F = 1$ правее сечения K - первую правую прямую $K'C'$ и вторую правую прямую $C'B'$ (рис.11,в).

Положение силы $F = 1$ левее K (рис.10,б)

$$\sum t^{\text{ЛЕВ.СИЛ}} = 0;$$

$$N_K = (-V_A + 1) \cdot \sin \varphi_K - H_A \cdot \cos \varphi_K; \quad (6)$$

$$N_K = (-V_A + 1) \cdot 0.724 - H_A \cdot 0.690.$$

Для построения прямой, описываемой этим выражением, рассмотрим два положения силы $F = 1$ - в точке A и бесконечно близко к сечению K , но левее от него.

В т. A $N_K = (-1 + 1) \cdot 0.724 - 0 \cdot 0.690 = 0;$

в т. $K_{(-0)}$

$$N_K = (-0.775 + 1) \cdot 0.724 - 0.300 \cdot 0.690 = -0.0441.$$

По найденным ординатам строим линию влияния N_K при положении силы $F = 1$ левее сечения K - левую прямую $A'K''$.

Окончательно $A' - K'' - K' - C' - B'$ - линия влияния нормальной силы N_K при движении силы $F = 1$ непосредственно по арке (рис. 11,в).

Отметим следующие характерные особенности линии влияния N_K - 1) в сечении K наблюдается скачок, численно равный $\sin \varphi_K = 0.724$; 2) левая прямая $A'K''$ и первая правая прямая $K'C'$ параллельны между собой и сдвинуты одна относительно другой на $\sin \varphi_K = 0.724$.

Другим способом построения линии влияния N_K является «способ нулевой точки». На рис.16 показано построение линии влияния N_K этим способом.

Рассмотрим положение силы $F = 1$ на участке KC . Для этого случая (сила $F = 1$ правее K) справедливо полученное ранее выражение (5) $N_K = -V_A \cdot \sin \varphi_K - H_A \cdot \cos \varphi_K$. Подсчитаем вспомогательную ординату $A'A''$ линии влияния N_K в точке A $N_K = -1 \cdot \sin \varphi_K - 0 \cdot \cos \varphi_K = -\sin \varphi_K = -0.724$.

Определим положение нулевой ординаты линии влияния N_K - расстояние x_0^N . При положении силы $F = 1$ на участке KC

реакция R_B действует по линии BC . Для того, чтобы нормальная сила $N_K = -R_A \cdot \cos \psi$ (рис.17) равнялась нулю, линия действия реакции R_A должна быть перпендикулярна касательной t . В этом случае $\cos \psi$ (рис.17) обращается в нуль.

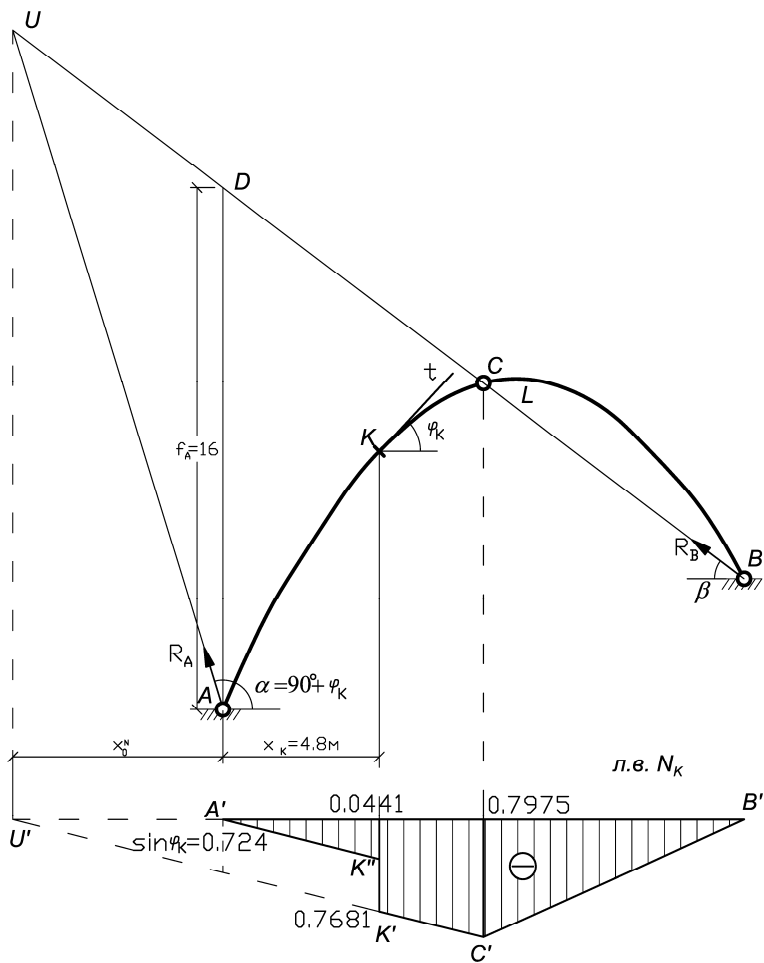


Рис.16

Пересечение направлений реакций R_A и R_B в точке U определяет положение силы $F = 1$, при котором $N_K = 0$ (рис.16). Расстояние x_0^N определяется по той же формуле, что и расстояние x_0 для линий влияния M_K и Q_K ,

$$x_0^N = \frac{f_A}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}.$$

Здесь β - угол наклона реакции R_B , действующей по линии BC , $\operatorname{tg}\beta = 0.75$; α - угол наклона реакции R_A , линия действия которой перпендикулярна касательной t , $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(90^\circ + \varphi_K) = -\operatorname{ctg}\varphi_K = -0.9524$.

Определяем $x_0^N = 16 / (-0.9524 + 0.75) = -79.059$.

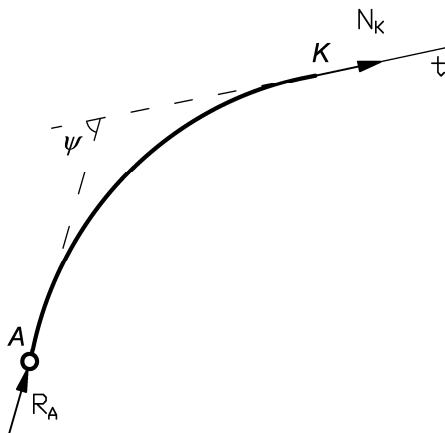


Рис.17

Соединяем вспомогательную ординату $A'A'' = -\sin\varphi_K = -0.724$ под точкой A с нулевой ординатой под точкой U прямой линией (рис.16). На участке $K'C'$ (первая правая прямая) проводим сплошную линию и линию влияния на участке KC заштриховываем. Определим ординаты при положении силы $F = 1$ в точках K и C :

$$\text{т. К} \quad N_K = -\frac{0.724}{x_0^N} \cdot (x_0^N + x_K) = -0.7681;$$

$$\text{в т. С} \quad N_K = -\frac{0.724}{x_0^N} \cdot (x_0^N + 8) = -0.7975.$$

в

Ординату в точке B можно определить по той же формуле (5)
$$N_K = -V_A \cdot \sin \varphi_K - H_A \cdot \cos \varphi_K = -0 \cdot 0.724 - 0 \cdot 0.690 = 0$$

Проводим вторую правую прямую $C'B'$.

При положении силы $F = 1$ левее сечения K на участке AK нормальную силу можно определить по полученной ранее формуле (6). Сравнивая выражение (6) с выражением (5), замечаем, что на участках AK и KC линия влияния N_K очерчивается двумя прямыми, параллельными между собой и сдвинутыми одна относительно другой на постоянную величину $\sin \varphi_K = 0.724$. Поэтому для построения левой прямой достаточно рассмотреть положение единичной силы только в т. A (ордината линии влияния N_K в этом случае равна нулю). Далее проводим левую прямую $A'K''$, параллельную первой правой прямой $K'C'$. Таким образом, $A' - K'' - K' - C' - B'$ - линия влияния N_K при движении силы $F = 1$ непосредственно по арке (рис.11,в; рис.16).

3.2. Построение линий влияния реакций и внутренних усилий в сечении K с учетом узловой передачи нагрузки

Как уже указывалось раньше, при построении линии влияния любого фактора в случае узловой передачи нагрузки сначала строится линия влияния при движении силы $F = 1$ непосредственно по арке, а потом учитывается узловая передача нагрузки путем построения передаточных прямых.

Линия влияния вертикальной реакции V_A (рис.18,а)

Сначала строим линию влияния V_A при движении силы $F = 1$ непосредственно по арке – на рис.18,а она показана пунктирными линиями $A' - C' - B'$. Эта линия влияния взята с рис.8,а. Там же на рис.8,а приведены значения ординат при положении силы $F = 1$ в точках A , B , C . По этим ординатам определяем значения узловых ординат при положении силы $F = 1$: в узле 1-

$V_A = 0.906$, в узле 2 - $V_A = 0.719$, в узле 3 - $V_A = 0.469$, в узле 4 - $V_A = 0.156$ (рис.18,а)

В случае положения силы $F = 1$ в узле 0 (рис.18) нагрузка на арку не передается. Поэтому реакции и внутренние усилия во всех сечениях арки в этом случае равны нулю. На линии влияния V_A (рис.18,а) под этим узлом нулевая ордината $0'$. Аналогично под узлом 5 – нулевая ордината $5'$.

Теперь строим передаточные прямые – соединяем узловые ординаты прямыми линиями $0' - 1'$, $1' - 2'$, $2' - 3'$, $3' - 4'$ и $4' - 5'$. Окончательно $0' - 1' - 2' - 3' - 4' - 5'$ - линия влияния вертикальной реакции V_A при движении силы $F = 1$ по верхнему строению $0 - 1 - 2 - 3 - 4 - 5$ заданной системы (рис.18,а).

Линия влияния вертикальной реакции V_B (рис.18,б)

Сначала строим линию влияния V_B при движении силы $F = 1$ непосредственно по арке – на рис.18,б она показана пунктирными линиями $A' - C' - B'$. Эту линию влияния мы взяли с рис.8,б. Там же на рис.8,б приведены значения ординат при положении силы $F = 1$ в точках A , B , C . По этим ординатам определяем значения узловых ординат при положении силы $F = 1$: в узле 1 - $V_B = 0.0938$, в узле 2 - $V_B = 0.281$, в узле 3 - $V_B = 0.531$, в узле 4 - $V_B = 0.844$, в узлах 0 и 5 – нулевые ординаты $0'$ и $5'$ (рис.18,б).

Теперь строим передаточные прямые – соединяем узловые ординаты прямыми линиями $0' - 1'$, $1' - 2'$, $2' - 3'$, $3' - 4'$ и $4' - 5'$. Окончательно $0' - 1' - 2' - 3' - 4' - 5'$ - линия влияния вертикальной реакции V_B при движении силы $F = 1$ по верхнему строению $0 - 1 - 2 - 3 - 4 - 5$ заданной системы (рис.18,б).

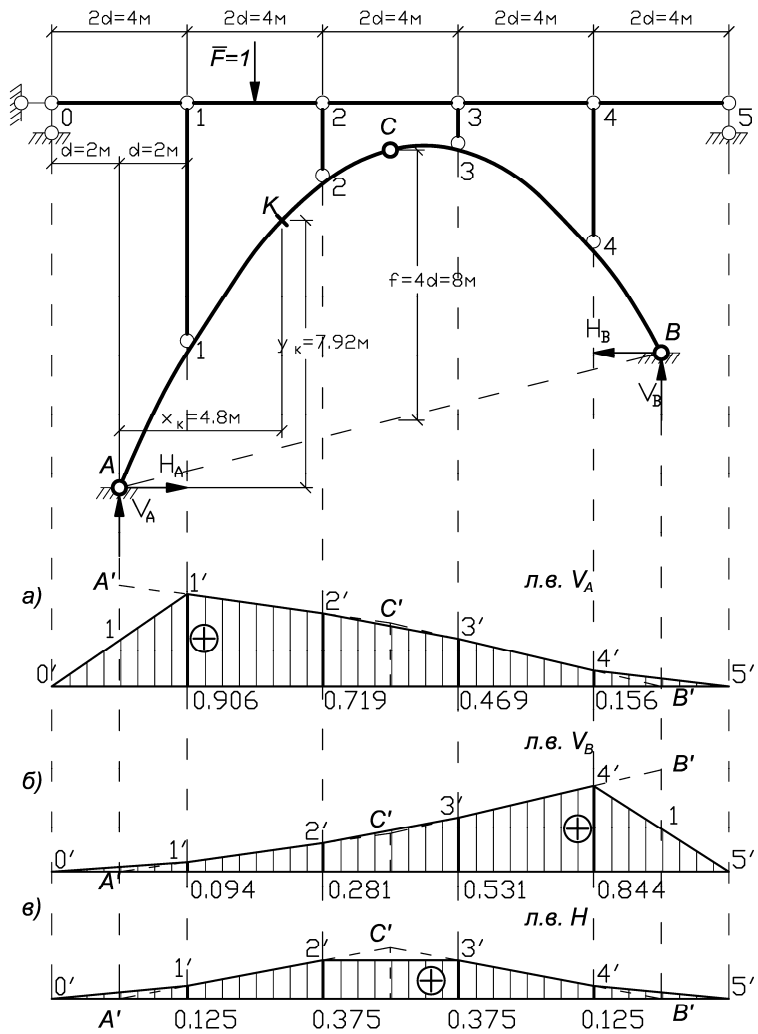


Рис.18

Линия влияния распора $H_A = H_B = H$ (рис.18,в)

Линия влияния распора $H_A = H_B = H$ при движении силы $F = 1$ непосредственно по арке показана на рис.8,в. Там же приведены значения ординат при положении силы $F = 1$ в точках

A, B, C . Переносим эту линию влияния на рис.18,в – пунктирные линии $A' - C' - B'$. Определим значения узловых ординат при положении силы $F = 1$: в узле 1- $H = 0.125$, в узле 2 - $H = 0.375$, в узле 3 - $H = 0.375$, в узле 4 - $H = 0.125$, в узлах 0 и 5 – нулевые ординаты $0'$ и $5'$ (рис.18,в).

Теперь строим передаточные прямые – соединяем узловые ординаты прямыми линиями $0' - 1'$, $1' - 2'$, $2' - 3'$, $3' - 4'$ и $4' - 5'$. Окончательно $0' - 1' - 2' - 3' - 4' - 5'$ - линия влияния распора $H_A = H_B = H$ при движении силы $F = 1$ по верхнему строению $0 - 1 - 2 - 3 - 4 - 5$ заданной системы (рис.18,в).

Линия влияния изгибающего момента M_K (рис.19,а)

На рис.11,а построена линия влияния изгибающего момента M_K при движении силы $F = 1$ непосредственно по арке. Там же на рис.11,а приведены значения ординат при положении силы $F = 1$ в точках A, K, C, B . Переносим эту линию влияния на рис.19,а – пунктирные линии $A' - K' - C' - B'$.

Определяем значения узловых ординат при положении силы $F = 1$: в узле 1- $M_K = 0.560$, в узле 2 - $M_K = 0.480$, в узле 3 - $M_K = 0.720$, в узле 4 - $M_K = 0.240$, в узлах 0 и 5 – нулевые ординаты $0'$ и $5'$ (рис.19,а).

Далее строим передаточные прямые – соединяем узловые ординаты прямыми линиями $0' - 1'$, $1' - 2'$, $2' - 3'$, $3' - 4'$ и $4' - 5'$.

Окончательно $0' - 1' - 2' - 3' - 4' - 5'$ - линия влияния изгибающего момента M_K при движении силы $F = 1$ по верхнему строению $0 - 1 - 2 - 3 - 4 - 5$ заданной системы (рис.19,а).

Линия влияния поперечной силы Q_K (рис.19,б)

На рис.11,б построена линия влияния поперечной силы Q_K при движении силы $F = 1$ непосредственно по арке. Там же на рис.11,б приведены значения ординат при положении силы $F = 1$ в точках A, K, C, B . Переносим эту линию влияния на рис.19,б – пунктирные линии $A' - K'' - K' - C' - B'$. Определяем

значения узловых ординат при положении силы $F = 1$: в узле 1- $Q_K = -0.1554$, в узле 2 - $Q_K = 0.2244$, в узле 3 - $Q_K = 0.0518$, в узле 4 - $Q_K = 0.0173$, в узлах 0 и 5 – нулевые ординаты $0'$ и $5'$ (рис.19,б).

Теперь строим передаточные прямые – соединяем узловые ординаты прямыми линиями $0' - 1'$, $1' - 2'$, $2' - 3'$, $3' - 4'$ и $4' - 5'$. Таким образом, $0' - 1' - 2' - 3' - 4' - 5'$ - линия влияния поперечной силы Q_K при движении силы $F = 1$ по верхнему строению $0 - 1 - 2 - 3 - 4 - 5$ заданной системы (рис.19,б).

Обращаем внимание, что линия влияния поперечной силы Q_K , построенная с учетом узловой передачи нагрузки (рис.19,б), не имеет скачка в сечении K .

Линия влияния нормального усилия N_K (рис.19,в)

На рис.11,в построена линия влияния нормального усилия N_K при движении силы $F = 1$ непосредственно по арке. Там же на рис.11,в приведены значения ординат при положении силы $F = 1$ в точках A , B , C . Переносим эту линию влияния на рис.19,в – пунктирные линии $A' - K'' - K' - C' - B'$.

Определяем значения узловых ординат при положении силы $F = 1$: в узле 1- $N_K = -0.0184$, в узле 2 - $N_K = -0.7791$, в узле 3 - $N_K = -0.5981$, в узле 4 - $N_K = -0.1994$, в узлах 0 и 5 – нулевые ординаты $0'$ и $5'$ (рис.19,в). Далее строим передаточные прямые – соединяем узловые ординаты прямыми линиями $0' - 1'$, $1' - 2'$, $2' - 3'$, $3' - 4'$ и $4' - 5'$.

Окончательно $0' - 1' - 2' - 3' - 4' - 5'$ - линия влияния нормального усилия N_K при движении силы $F = 1$ по верхнему строению $0 - 1 - 2 - 3 - 4 - 5$ заданной системы (рис.19,в).

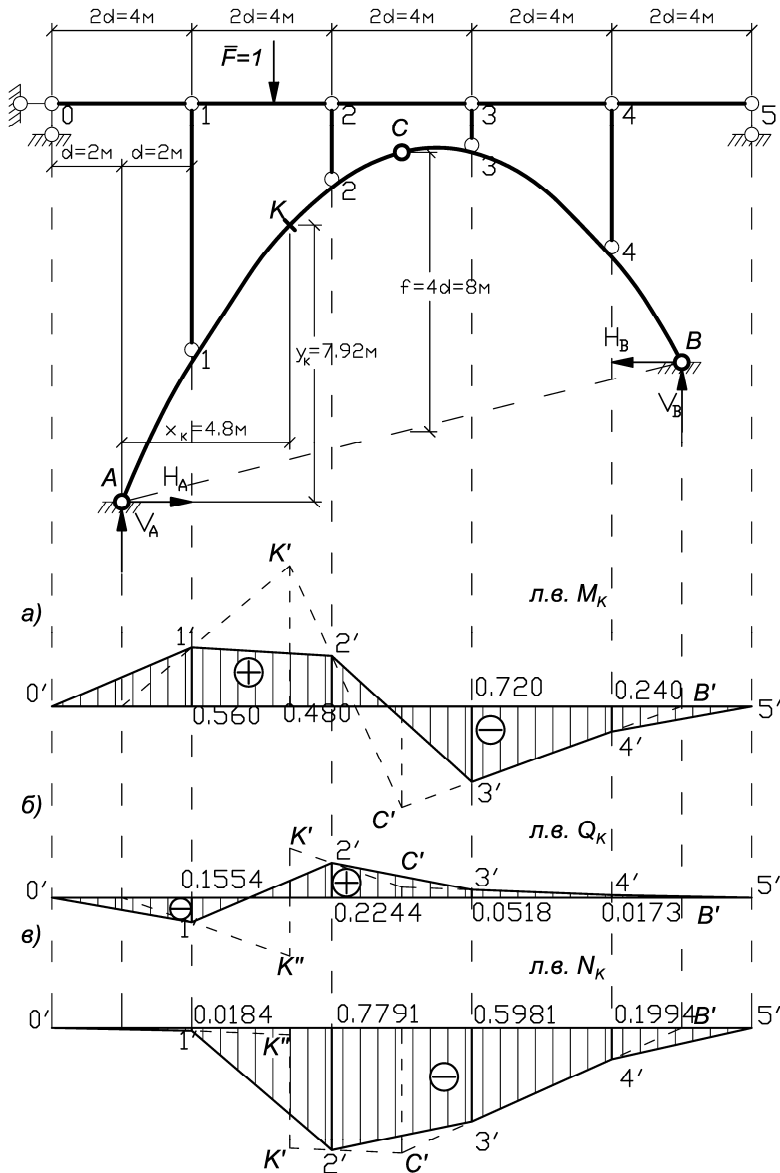


Рис.19

Обращаем внимание, что линия влияния нормального усилия N_K , построенная с учетом узловой передачи нагрузки (рис.19,в), не имеет скачка в сечении K .

4. Определение усилий в арке от заданной неподвижной нагрузки с помощью линий влияния

Для проверки реакций и внутренних усилий в сечении K от заданной неподвижной равномерно распределенной нагрузки $q = 2кН / м$ (рис.1), найденных ранее, определим те же факторы по построенным линиям влияния, используя известную формулу

$$S = q \cdot \Omega, \quad (7)$$

где Ω - площадь линии влияния S в пределах расположения распределенной нагрузки q .

Для подсчета Ω на линиях влияния опорных реакций V_A, V_B , H (рис.18) и на линиях влияния внутренних усилий в сечении K арки (рис.19) требуются дополнительные ординаты на границе нагрузки q посередине участка 0-1. Эти ординаты равны половине ординаты в узле 1 на соответствующей линии влияния (рис.18,19). Приведем подробные вычисления для вертикальной реакции V_A

$$V_A = q \cdot \Omega = 2 \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \left(0.906 + \frac{0.906}{2} \right) + \frac{1}{2} \cdot 4(0.906 + 0.719) + \frac{1}{2} \cdot 4(0.719 + 0.469) + \frac{1}{2} \cdot 4(0.469 + 0.156) \right) = 16.47(кН)$$

начение реакции V_A , вычисленное в разделе 2.2 от нагрузки q аналитическим методом, такое же.

Так как распределенная нагрузка q передается на арку в виде сосредоточенных сил (рис.4), реакции и внутренние усилия от этой нагрузки по построенным линиям влияния можно определить и по другой формуле $S = \sum F_i \cdot y_i$. Здесь y_i - ордината линии влияния S под силой F_i . Значения сил $F_1 = 7$, $F_2 = 8$, $F_3 = 8$, $F_4 = 4$ указаны на рис.4. Приведем вычисления для вертикальной реакции V_A этим способом

$$V_A = 7 \cdot 0.906 + 8 \cdot 0.719 + 8 \cdot 0.469 + 4 \cdot 0.156 = 16.47 .$$

Для остальных реакций и внутренних усилий в сечении K приведем ниже в таблице 1 только окончательные результаты.

Таблица 1

Усилие S	Размерность	Значение S , полученное по линии влияния	Значение S , полученное в разделах 2.2, 2.3
V_A	кН	16.47	16.469
V_B	кН	10.53	10.531
$H_A = H_B$	кН	7.375	7.375
M_K	кН м	1.040	1.041
Q_K	кН	1.191	1.191
N_K	кН	-11.944	-11.944

5. Построение линий влияния нормальных напряжений в сечении K и определение экстремальных значений этих напряжений от подвижной нагрузки q

Сначала определим геометрические параметры поперечного сечения K (рис.20). Размеры поперечного сечения принимаем в метрах, так как ординаты линии влияния изгибающего момента M_K (рис.11,а) имеют размерность в метрах.

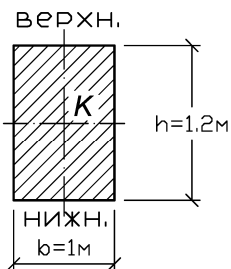


Рис.20

Площадь поперечного сечения $A = b \cdot h = 1 \cdot 1.2 = 1.2 \text{ м}^2$.

Момент сопротивления сечения $W = \frac{bh^2}{6} = \frac{1 \cdot 1.2^2}{6} = 0.24 \text{ м}^3$.

Напоминаем ранее принятое правило знаков для внутренних усилий – нормальное усилие N положительно, если оно растягивает ось арки; изгибающие моменты M положительны, если они растягивают нижние волокна.

Нормальные напряжения в сечении K определяем по формулам:

$$\text{в крайнем нижнем волокне } \sigma^{(\text{НИЖН.})} = \frac{N_K}{A} + \frac{M_K}{W}; \quad (8)$$

$$\text{в крайнем верхнем волокне } \sigma^{(\text{ВЕРХН.})} = \frac{N_K}{A} - \frac{M_K}{W}. \quad (9)$$

Сначала строим линии влияния нормальных напряжений при движении силы $F = 1$ непосредственно по арке, а потом учтем узловую передачу нагрузки путем построения передаточных прямых.

5.1. Линии влияния нормальных напряжений в сечении K при движении силы $F = 1$ непосредственно по арке

Воспользуемся линиями влияния M_K и N_K , построенными при движении силы $F = 1$ по самой арке (рис.11,а,в). Значения ординат этих линий влияния подставим в формулы для нормальных напряжений (8) и (9).

Приведем подробные вычисления ординат линии влияния нормального напряжения $\sigma^{(\text{НИЖН.})}$ по формуле (8) при положении силы $F = 1$:

$$\text{в т. } A \quad \sigma^{(\text{НИЖН.})} = 0;$$

$$\text{в т. } K \text{ (левее)} \quad \sigma^{(\text{НИЖН.})} = \frac{(-0.0441)}{1.2} + \frac{1.344}{0.24} = 5.563 \left(\frac{1}{\text{м}^2} \right); \text{ в}$$

$$\text{т. } K \text{ (правее)} \quad \sigma^{(\text{НИЖН.})} = \frac{(-0.7681)}{1.2} + \frac{1.344}{0.24} = 4.960 \left(\frac{1}{\text{м}^2} \right);$$

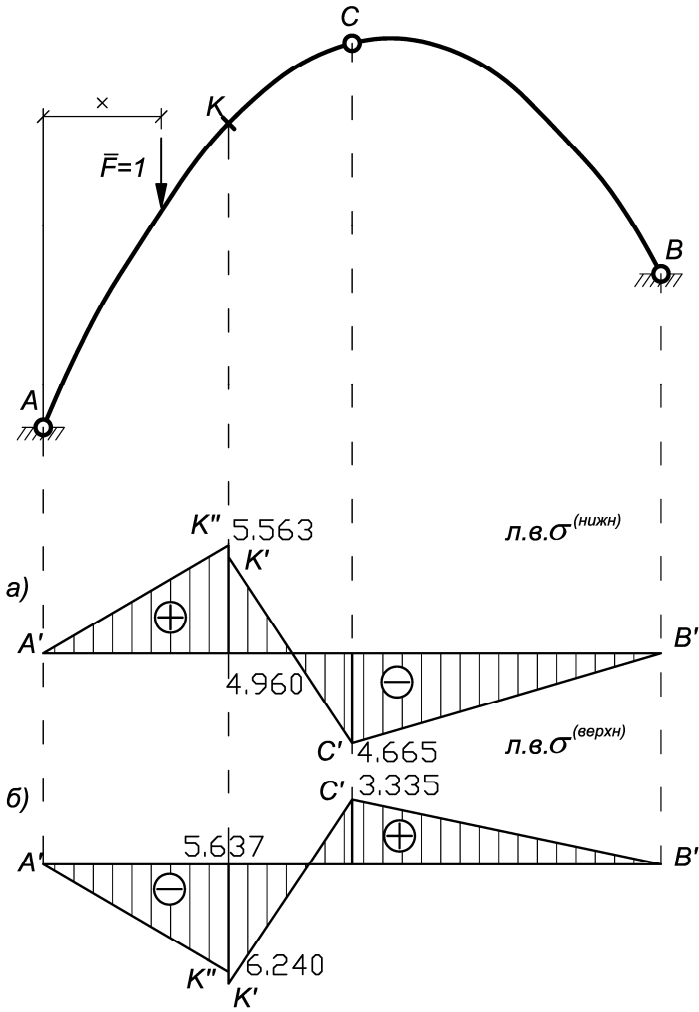


Рис.21

$$\text{в т. } C \quad \sigma^{(\text{НИЖН.})} = \frac{(-0.7975)}{1.2} + \frac{(-0.960)}{0.24} = -4.665 \left(\frac{1}{\text{м}^2} \right);$$

$$\text{в т. } B \quad \sigma^{(\text{НИЖН.})} = 0.$$

По этим ординатам строим линию влияния нормального напряжения в крайнем нижнем волокне $\sigma^{(НИЖН.)}$ сечения K при движении силы $F = 1$ непосредственно по арке - $A' - K'' - K' - C' - B'$ (рис.21,а). Отметим характерную особенность этой линии влияния – в сечении K наблюдается скачок.

Аналогично по формуле (9) определяются значения ординат линии влияния нормального напряжения $\sigma^{(ВЕРХН.)}$ в крайнем верхнем волокне сечения K при движении силы $F = 1$ непосредственно по арке. Подробные вычисления не приводим. Линия влияния $\sigma^{(ВЕРХН.)}$ при движении силы $F = 1$ по самой арке построена на рис.21,б - $A' - K'' - K' - C' - B'$. Там же приведены значения ординат этой линии влияния.

5.2. Линии влияния нормальных напряжений в сечении K при узловой передаче нагрузки

Приведем вычисления для построения линии влияния нормального напряжения $\sigma^{(НИЖН.)}$ при узловой передаче нагрузки.

На рис.21,а построена линия влияния нормального напряжения $\sigma^{(НИЖН.)}$ при движении силы $F = 1$ непосредственно по арке.

Там же на рис.21,а приведены значения ординат в точках A , K , B , C . Переносим эту линию влияния на рис.22,а – пунктирные линии $A' - K'' - K' - C' - B'$. Определяем значения узловых ординат при положении силы $F = 1$: в узле 1 - $\sigma^{(НИЖН.)} = 2.318$, в узле 2 - $\sigma^{(НИЖН.)} = 1.351$, в узле 3 - $\sigma^{(НИЖН.)} = -3.499$, в узле 4 - $\sigma^{(НИЖН.)} = -1.166$, в узлах 0 и 5 – нулевые ординаты $0'$ и $5'$ (рис.22,а).

Теперь строим передаточные прямые – соединяем узловые ординаты прямыми линиями $0' - 1'$, $1' - 2'$, $2' - 3'$, $3' - 4'$ и $4' - 5'$.

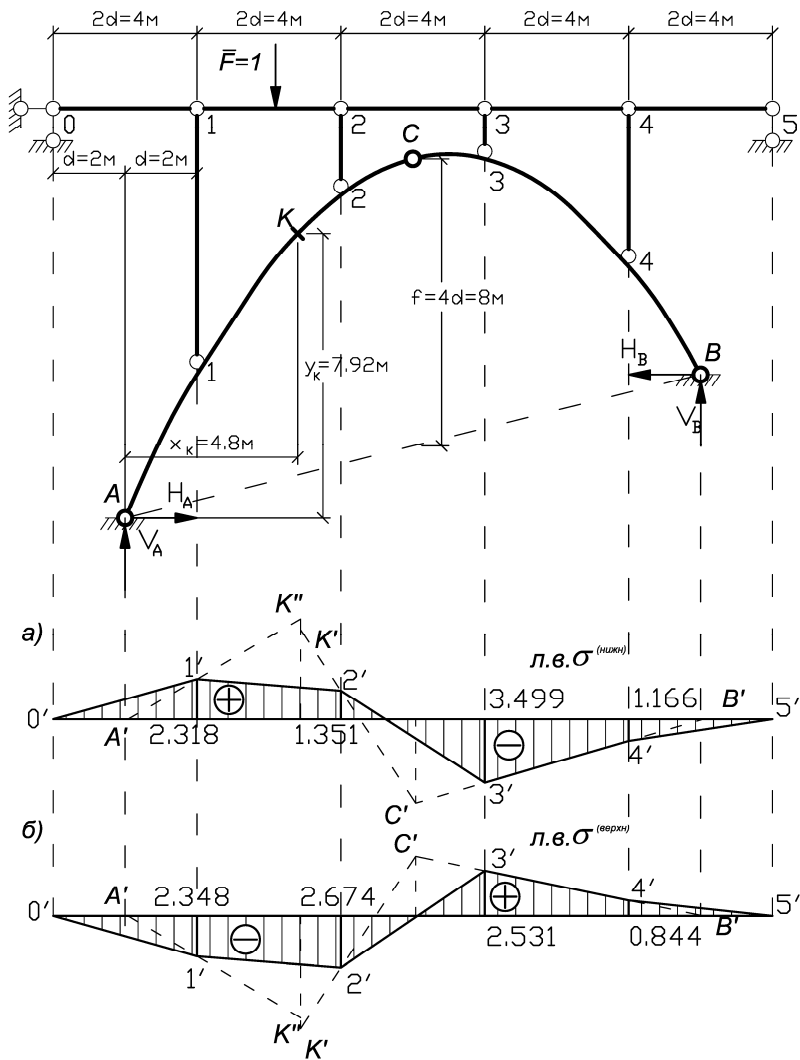


Рис.22

Окончательно $0' - 1' - 2' - 3' - 4' - 5'$ - линия влияния нормального напряжения $\sigma^{(нижн.)}$ при движении силы $F = 1$ по верхнему строению $0 - 1 - 2 - 3 - 4 - 5$ заданной системы (рис.22,а).

Аналогично строим линию влияния $\sigma^{(ВЕРХН.)}$ нормального напряжения в крайнем верхнем волокне сечения K при узловой передаче нагрузки - $A' - K'' - K' - C' - B'$ (рис.22,б). Там же приведены ординаты этой линии влияния.

Проверим значения ординат линий влияния нормальных напряжений $\sigma^{(НИЖН.)}$ и $\sigma^{(ВЕРХН.)}$ (рис.22). Для этого определим эти напряжения от заданной неподвижной нагрузки $q = 2 \kappa H / м$ (рис.1) двумя способами – путем расчета аналитическим методом и по линиям влияния.

Сначала определим эти напряжения аналитическим методом. В разделе 2.3 получены значения внутренних усилий в сечении K - $M_K = 1.041 \kappa H м$, $N_K = -11.944 \kappa H$ от заданной на рис.1 неподвижной нагрузки q . Найдем по формулам (8) и (9) нормальные напряжения в крайних нижнем и верхнем волокнах сечения K

$$\sigma^{(НИЖН.)} = \frac{N_K}{A} + \frac{M_K}{W} = -\frac{11.944}{1.2} + \frac{1.041}{0.24} = -5.616;$$

$$\sigma^{(ВЕРХН.)} = \frac{N_K}{A} - \frac{M_K}{W} = -\frac{11.944}{1.2} - \frac{1.041}{0.24} = -14.291.$$

Теперь определим напряжения $\sigma^{(НИЖН.)}$ и $\sigma^{(ВЕРХН.)}$ в сечении K от этой же нагрузки с помощью линий влияния.

Приведем вычисления для нормального напряжения в крайнем нижнем волокне сечения K

$$\sigma^{(НИЖН.)} = q \cdot \Omega = 2 \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2.318}{2} + 2.318 \right) \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot (2.318 + 1.351) \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot (1.351 - 3.499) \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot (3.499 + 1.166) \cdot 4 \right) = -5.622 (\kappa H / м^2)$$

Здесь Ω - площадь линии влияния $\sigma^{(НИЖН.)}$ (рис.22,а) в пределах расположения заданной неподвижной нагрузки q (рис.1).

Аналогично определяется от заданной неподвижной нагрузки q с помощью линии влияния $\sigma^{(ВЕРХН.)}$ (рис.22,б) нормальное напряжение в крайнем верхнем волокне сечения K .

Результаты вычислений приведены ниже в таблице 2.

Таблица 2

	Получено по линии влияния (рис.19)	Получено аналитическим методом
$\sigma^{(НИЖН.)}$	$-5.622 \text{ кН}/\text{м}^2$	$-5.616 \text{ кН}/\text{м}^2$
$\sigma^{(ВЕРХН.)}$	$-14.204 \text{ кН}/\text{м}^2$	$-14.291 \text{ кН}/\text{м}^2$

5.3. Определение экстремальных значений нормальных напряжений $\sigma^{(НИЖН.)}$ и $\sigma^{(ВЕРХН.)}$ в сечении K от подвижной нагрузки q

Поскольку подвижная равномерно распределенная нагрузка является достаточно длинной, то для определения наибольшего и наименьшего значений нормального напряжения $\sigma^{(НИЖН.)}$ в сечении K загружаем положительную и отрицательную части линии влияния $\sigma^{(НИЖН.)}$ (рис.22,а) нагрузкой $q = 2 \text{ кН}/\text{м}$.

Предварительно определим расстояния от нулевой ординаты на участке 2-3 до узлов 2 и 3 (рис.22,а) – до узла 2 это расстояние равно 1.114(м), до узла 3 – 2.886(м).

Положительная и отрицательная части площади линии влияния $\sigma^{(НИЖН.)}$ равны:

$$\Omega_{(+)}(\sigma^{НИЖН.}) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2.318 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (2.318 + 1.351) + \frac{1}{2} \cdot 1.114 \cdot 1.351 = 12.73 \left(\frac{1}{M}\right)$$

$$\Omega_{(-)}(\sigma^{НИЖН.}) = -\left(\frac{1}{2} \cdot 2.886 \cdot 3.499 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (3.499 + 1.166) + \frac{1}{2} \cdot 1.166 \cdot 4\right) = -16.71 \left(\frac{1}{M}\right)$$

Определим по формуле (7) экстремальные нормальные напряжения в крайнем нижнем волокне сечения K :

$$\max \sigma^{(НИЖН.)} = q \cdot \Omega_{(+)}(\sigma^{(НИЖН.)}) = 2 \cdot 12.73 = 25.46 \left(\frac{кН}{M^2}\right)$$

$$\min \sigma^{(НИЖН.)} = q \cdot \Omega_{(-)}(\sigma^{(НИЖН.)}) = 2 \cdot (-16.71) = -33.42 \left(\frac{кН}{M^2}\right)$$

Аналогично определяются наибольшее и наименьшее нормальные напряжения в верхнем волокне сечения K путем загрузки положительной и отрицательной частей линии влияния $\sigma^{(ВЕРХН.)}$ (рис.22,б) равномерно распределенной подвижной нагрузкой q .

Результаты вычислений приведем в таблице 3.

Таблица 3

	$\sigma^{(НИЖН.)}$	$\sigma^{(ВЕРХН.)}$
max	$25.46 \frac{кН}{M^2}$	$21.80 \frac{кН}{M^2}$
min	$-33.42 \frac{кН}{M^2}$	$-34.98 \frac{кН}{M^2}$

6. Контрольные вопросы

1. Какие системы называются трехшарнирными? Их образование.
2. В чем преимущества и недостатки трехшарнирной системы по сравнению с балкой такого же пролета (при вертикальной нагрузке)?
3. Как определяются опорные реакции в трехшарнирных системах в общем случае и при нагрузке, расположенной только слева или только справа от шарнира C ?
4. В каких случаях применяются трехшарнирные системы с затяжкой? Как определяются усилия в таких системах?
5. Какое очертание оси арки называется рациональным? Как оно определяется?
6. В чем сложности построения линий влияния реакций в трехшарнирных системах по сравнению с балками?
7. Могут ли линии влияния вертикальных реакций трехшарнирной арки (рамы) совпадать с аналогичными линиями влияния для балки такого же пролета?
8. Почему линия влияния изгибающего момента в трехшарнирной арке, очерченной по квадратной параболе, имеет площадь, равную нулю?
9. Как контролируются графически нулевые ординаты линий влияния M_K, Q_K, N_K ?
10. Как строятся линии влияния в трехшарнирной арке при узловой передаче нагрузки?
11. В каком случае линии влияния Q_K, N_K имеют скачок в сечении K - при движении непосредственно по арке или при узловой передаче нагрузки?

СОДЕРЖАНИЕ

Исходные данные.....	3
1.Определение геометрических характеристик арки.....	4
2.Расчет арки на неподвижную нагрузку.....	5
2.1.Замена распределенной нагрузки сосредоточенными силами.....	5
2.2. Определение опорных реакций	7
2.3. Определение внутренних усилий в сечении K	8
3. Расчет арки на подвижную нагрузку.....	9
3.1. Построение линий влияния реакций и внутренних усилий при движении единичной силы непосредственно по самой арке.....	10
3.1.1. Линия влияния вертикальной реакции V_A	10
3.1.2. Линия влияния вертикальной реакции V_B	12
3.1.3 Линия влияния распора $H_A = H_B = H$	13
3.1.4. Построение линии влияния M_K (изгибающего момента в сечении K).....	16
3.1.5. Построение линии влияния Q_K (поперечной силы в сечении K)	22
3.1.6. Построение линии влияния N_K продольной силы в сечении K).....	27
3.2. Построение линий влияния реакций и внутренних усилий в сечении K с учетом узловой передачи нагрузки.....	31
4. Определение усилий в арке от заданной неподвижной нагрузки с помощью линий влияния.....	37
5. Построение линий влияния нормальных напряжений в сечении K и определение экстремальных значений этих напряжений от подвижной нагрузки q	38
6. Контрольные вопросы.....	46

Учебно-методическое издание

Галина Алексеевна Нольде

Михаил Анатольевич Лукьянов

под редакцией проф. Вадима Дмитриевича Потапова

РАСЧЕТ ТРЕХШАРНИРНОЙ АРКИ

Методические указания к практическим занятиям

по дисциплине «Строительная механика»

для студентов строительных специальностей

Подписано в печать

Заказ №

Тираж 100

Усл.-п.л. 3,0

Изд. № 43-08

Формат 60×84/16

127994, Москва,

ул. Образцова, 15,

типография МИИТ