

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего
профессионального образования
**«Московский государственный университет
путей сообщения»**

Кафедра «Строительная механика»

В.Б. ЗЫЛЕВ, А.В. ШТЕЙН, П.В. ПАВЛЕНКО

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ
ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ ДЕЙСТВИИ НАГРУЗКИ**

Рекомендовано редакционно-издательским советом
университета в качестве методических указаний

для студентов строительных специальностей ИПСС

Москва – 2013

УДК 624

З 96

Зылев В.Б., Штейн А.В., Павленко П.В. Определение перемещений и внутренних усилий при динамическом действии нагрузки: Методические указания. – М.: МИИТ, 2013.- 28 с.: ил.

Методические указания предназначены для использования студентами при выполнении домашнего задания «Определение перемещений и внутренних усилий при динамическом действии нагрузки».

Кратко излагаются необходимые теоретические сведения. Полностью рассмотрен пример выполнения домашнего задания.

Методические указания предназначены для студентов строительных специальностей.

© МИИТ, 2013

1. Содержание задания

Для конструкции, показанной на рис. 1.1, требуется:

Составить упрощенную стержневую расчетную схему с сосредоточенными массами. При этом необходимо определить величины сосредоточенных масс, площади и моменты инерции сечений. Расчетная модель должна содержать две динамические степени свободы.

Определить частоты и формы собственных колебаний для упрощенной плоской расчетной схемы.

Определить движение системы при заданных начальных смещениях.

Определить движение системы от действия начального импульса.

Определить расчетные сейсмические усилия для упрощенной расчетной схемы.

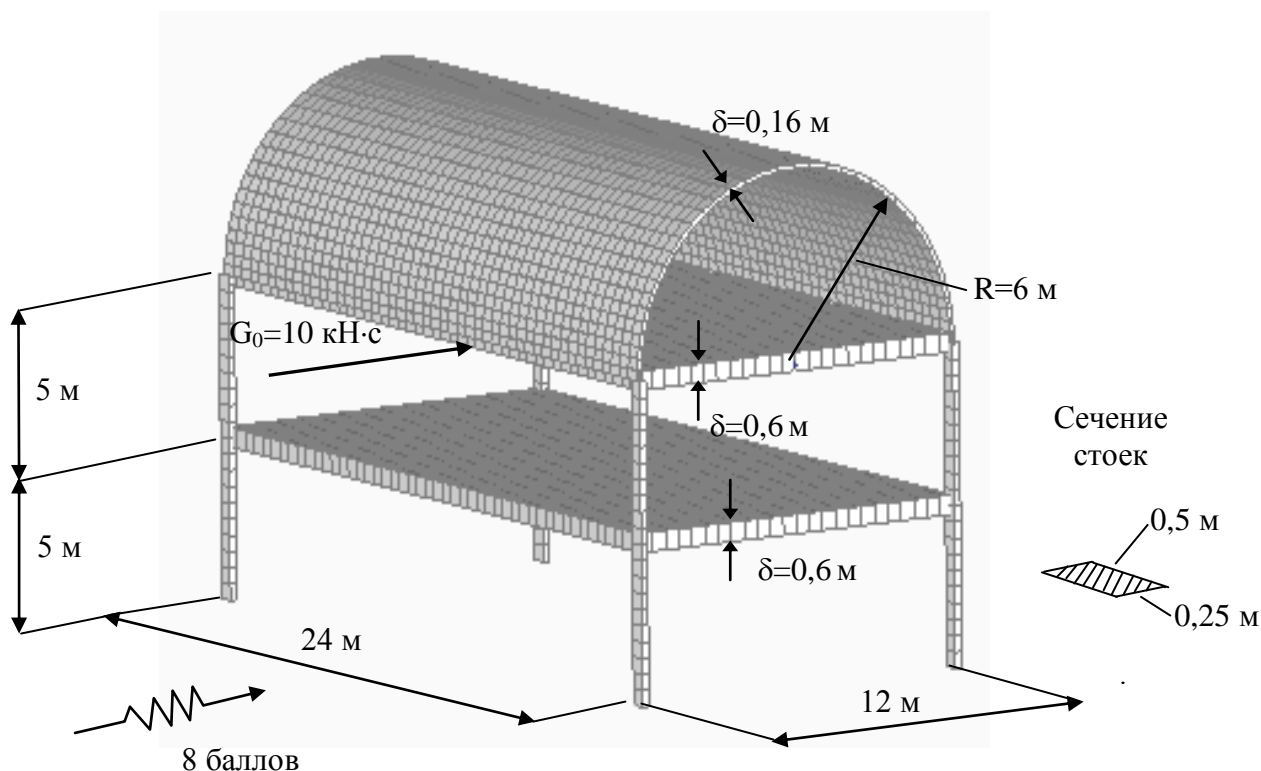


Рис. 1.1

Определить частоты и формы собственных колебаний с использованием доступного конечно-элементного программного комплекса. Густоту конечно-элементной сетки следует назначать исходя из возможностей компьютера и программы. Сравнить частоты

соответствующих форм с приближенными значениями, полученными по стержневой модели.

Физические константы материала конструкции примем как для бетона: модуль упругости $E = 35000 \text{ МПа}$, коэффициент Пуассона $\mu = 0,2$, массовая плотность $\rho = 2500 \text{ кг/м}^3$. Все размеры условной конструкции показаны от срединных линий стержней и срединных поверхностей пластин и оболочек.

2. Определение геометрических и массовых характеристик для плоской расчетной схемы

Пространственную конструкцию, показанную на рис. 1.1 заменим упрощенной плоской расчетной схемой (рис. 2.1). Данная схема состоит из двух бесконечно жестких дисков и изгибаемых стоек.

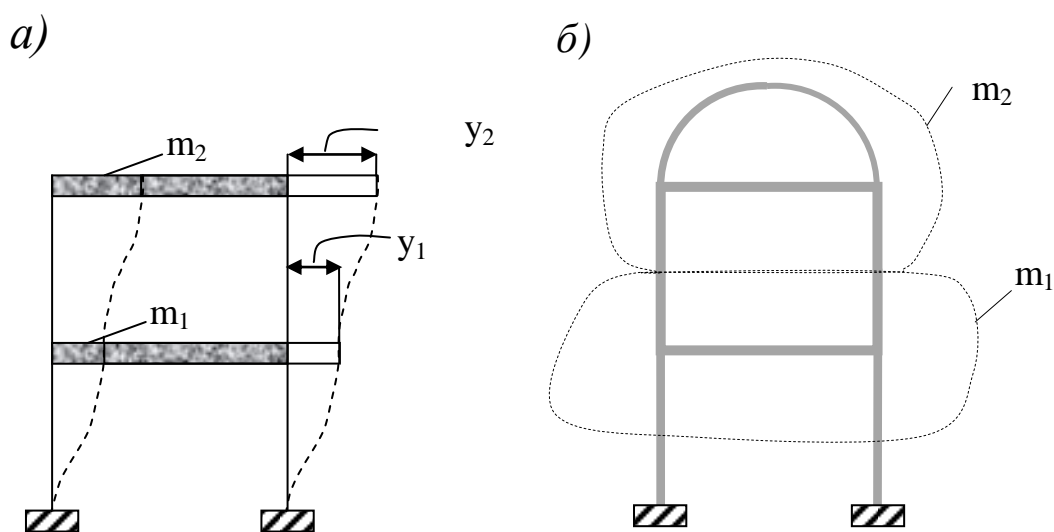


Рис. 2.1

При выполнении ручного расчета будем считать стержни нерастяжимыми и учитывать в них лишь деформацию изгиба. Нижнюю плиту и конструкцию верхнего этажа примем за жесткие диски. Тогда система будет иметь две динамические степени свободы (горизонтальные смещения этажей u_1 и u_2 рис. 2.1).

Момент инерции поперечного сечения стойки вычислим по формуле

$$J = bh^3/12 = 1 \cdot 0,25^3 / 12 = 1,302 \cdot 10^{-3} \text{ м}^4,$$

где $b = 2 \cdot 0,5 = 1$ м, $h = 0,25$ м. Здесь, учитывая специфику плоской расчетной схемы, ширину стойки, равную $0,5$ м, удваиваем.

Площадь поперечного сечения стойки равна

$$A_{\text{ст}} = b \cdot h = 0,5 \cdot 0,25 = 0,125 \text{ м}^2.$$

Длина полуокружности оболочки $L = \pi R = 3,14 \cdot 6 = 18,84$ м.

Площадь сечения оболочки $A_1 = 0,16 \cdot 18,84 = 3,0144 \text{ м}^2$.

Площадь сечения плиты $A_{\text{пл}} = 0,6 \cdot 12 = 7,2 \text{ м}^2$.

Площадь сечения верхней плиты и оболочки

$$A_2 = A_1 + A_{\text{пл}} = 3,0144 + 7,2 = 10,2144 \text{ м}^2.$$

Обозначим через V_1 объем нижней плиты, а через V_2 объем верхней плиты и оболочки.

$$V_1 = A_{\text{пл}} \cdot 24 = 7,2 \cdot 24 = 172,8 \text{ м}^3,$$

$$V_2 = A_2 \cdot 24 = 10,2144 \cdot 24 = 245,15 \text{ м}^3.$$

Определим объем восьми стоек (четыре между землей и нижней плитой, четыре между плитами)

$$V_{\text{ст}} = 8 \cdot A_{\text{ст}} \cdot 5 = 8 \cdot 0,125 \cdot 5 = 5 \text{ м}^3.$$

Для определения массы стоек необходимо объем стоек умножить на массовую плотность ρ

$$m_{\text{ст}} = V_{\text{ст}} \cdot \rho = 5 \cdot 2500 = 12500 \text{ кг}.$$

Теперь вычислим нижнюю и верхнюю массы. В первую массу (m_1) включаем нижнюю плиту и часть массы стоек, во вторую (m_2) – верхнюю плиту, оболочку и часть массы стоек. Положим, что в первую массу включена половина массы нижних и верхних стоек, во вторую – половина массы верхних стоек (рис. 2.1 б). Кроме того, считаем, что половина массы нижних стоек попадает на закрепленные опорные точки.

Таким образом,

$$m_1 = V_1 \cdot \rho + 0,5 \cdot m_{\text{ст}} = 172,8 \cdot 2500 + 0,5 \cdot 12500 = 438250 \text{ кг},$$

$$m_2 = V_2 \cdot \rho + 0,25 \cdot m_{\text{ст}} = 245,15 \cdot 2500 + 0,25 \cdot 12500 = 616000 \text{ кг}.$$

Поскольку $m_2/m_1 = 1,4056$, то введем обозначения $m_1 = m$, $m_2 = 1,4056m$.

3. Определение частот собственных колебаний с использованием плоской расчетной схемы

Для составления частотного уравнения (3.1) необходимо построить матрицу податливости $[\delta]$, которая состоит из перемещений по направлению динамических степеней свободы от действия единичных сил,

$$\text{где } [\delta] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix}.$$

Заданная система является статически неопределимой (имеет 6 лишних неизвестных по методу сил), однако эпюры можно построить достаточно быстро, используя известные из курса строительной механики стандартные эпюры метода перемещений и принятое допущение о бесконечной жесткости ригелей.

Рассмотрим подробнее порядок построения единичной эпюры \bar{M}_1 . Очевидно, что точка приложения силы смещается направо (рис. 3.1, а). Верхнее сечение стоек первого этажа получает поступательное перемещение поперек оси стержня без поворота. Таким образом, изгибаемая стойка находится точно в тех же условиях как стержневой элемент в основной системе метода перемещений (рис. 3.1, б).

Пользуясь стандартными эпюрами метода перемещений, можно показать соответствующий вид эпюры моментов (рис. 3.1, б). Для нас в данном случае достаточно знать, что эпюра в стержнях меняется по линейному закону, а ординаты в верхнем и нижнем сечении равны по абсолютной величине. Это дает возможность показать вид эпюры моментов в стойках (рис. 3.1, в). После чего, можно определить и сами ординаты, которые соответствуют приложенной единичной силе. Спроецировав все силы, действующие на отсеченную часть, показанную на рис. 3.1 г, найдем

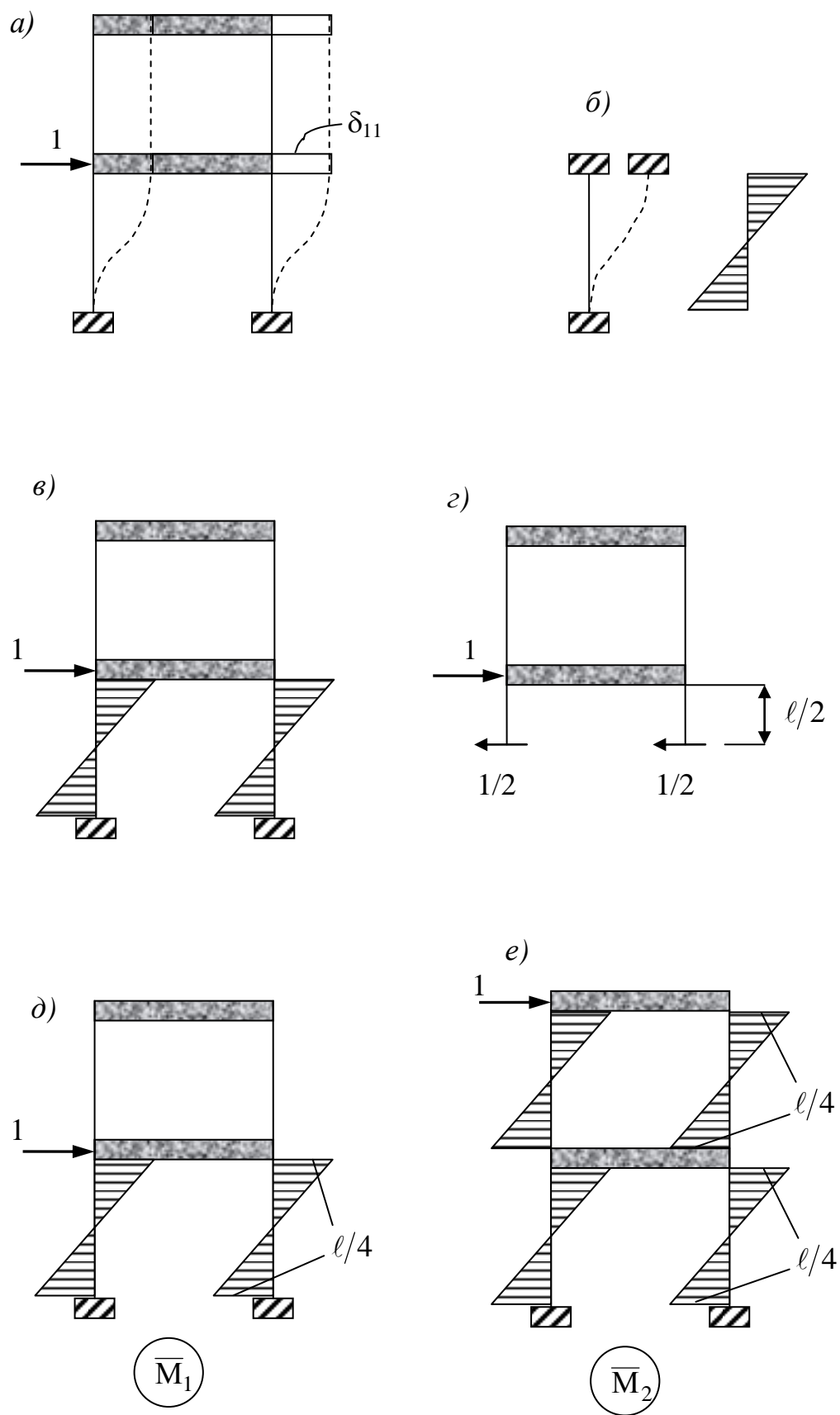


Рис. 3.1

значение поперечной силы в вертикальных стойках $Q=1/2$. Теперь определим изгибающие моменты в основаниях стоек как в консольном стержне, загруженном на конце силой, $M = \frac{1}{2} \cdot \frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{4}$. Здесь мы учли, что в середине стержня в соответствии с рис. 3.1, в изгибающие моменты равны нулю. Сделав сечение через стойки второго этажа, покажем, что поперечные силы в стойках там равны нулю, следовательно, будут отсутствовать и изгибающие моменты. Таким образом, эпюра моментов \bar{M}_1 будет иметь вид, показанный на рис. 3.1, д. Отметим, что и в ригеле первого этажа имеются изгибающие моменты, но они не требуются для наших целей, так как не внесут вклад в перемещения при перемножении эпюр (соответствующие слагаемые придется делить на бесконечно большую жесткость ригеля).

Аналогично строится эпюра \bar{M}_2 (рис. 3.1, е), но она будет иметь распространение на два этажа, так как сила приложена в уровне второго этажа.

Отметим, что приведенная здесь схематизированная расчетная схема здания нередко используется при реальном проектировании.

Коэффициенты δ_{ij} вычислим по формуле Мора с использованием правила Верещагина

$$\delta_{11} = \int_s \frac{\bar{M}_1^2}{EJ} ds = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\ell}{4} \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\ell}{4} \cdot 4 = \frac{\ell^3}{24EJ},$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{\ell^3}{24EJ}, \quad \delta_{22} = 2 \cdot \frac{\ell^3}{24EJ} = \frac{\ell^3}{12EJ}.$$

Частотное уравнение для системы с двумя степенями свободы имеет вид

$$\begin{vmatrix} \left(\delta_{11}m_1 - \frac{1}{\omega^2} \right) & \delta_{12}m_2 \\ \delta_{21}m_1 & \left(\delta_{22}m_2 - \frac{1}{\omega^2} \right) \end{vmatrix} = 0, \quad (3.1)$$

где ω – круговая частота собственных колебаний системы.

Подставляя в уравнение (3.1) значения величин δ_{ij} , а также m_1 и m_2 получим

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{\ell^3}{24EJ} \cdot m - \frac{1}{\omega^2} \right) & \frac{\ell^3}{24EJ} \cdot 1,4056m \\ \frac{\ell^3}{24EJ} \cdot m & \left(\frac{2\ell^3}{24EJ} \cdot 1,4056m - \frac{1}{\omega^2} \right) \end{vmatrix} = 0. \quad (3.2)$$

Разделим все элементы на $\frac{\ell^3 m}{24EJ}$ и обозначим

$$\lambda = \frac{1}{\omega^2} \cdot \frac{24EJ}{\ell^3 m}, \quad (3.3)$$

тогда уравнение (3.2) запишется в виде

$$\begin{vmatrix} (1 - \lambda) & 1,4056 \\ 1 & (2,8112 - \lambda) \end{vmatrix} = 0. \quad (3.4)$$

Раскрыв определитель, получим алгебраическое уравнение относительно λ

$$\lambda^2 - 3,8112\lambda + 1,4056 = 0. \quad (3.5)$$

Квадратное уравнение вида $\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ имеет два положительных корня $\lambda_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{b^2/4 - c}$. В данном случае $b = -3,8112$, $c = 1,4056$. Тогда корни уравнения (3.4) равны

$$\lambda_1 = \frac{3,8112}{2} + \sqrt{(-3,8112)^2/4 - 1,4056} = 3,3975,$$

$$\lambda_2 = \frac{3,8112}{2} - \sqrt{(-3,8112)^2/4 - 1,4056} = 0,4137.$$

Корням λ_1 и λ_2 соответствуют частоты ω_1 и ω_2 . Значение величин ω_1 и ω_2 определим используя обозначение (3.3)

$$\omega_k = \sqrt{\frac{24EJ}{\lambda_k \cdot \ell^3 \cdot m}}, \quad k = 1, 2.$$

Тогда

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{24EJ}{\lambda_1 \cdot \ell^3 \cdot m}} = \sqrt{\frac{24 \cdot 3,5 \cdot 10^{10} \text{ кг} \cdot \text{м} / (\text{с}^2 \cdot \text{м}^2) \cdot 1,302 \cdot 10^{-3} \text{ м}^4}{3,3975 \cdot 5^3 \text{ м}^3 \cdot 438250 \text{ кг}}} = 2,424 \text{ рад/с} ,$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{24EJ}{\lambda_2 \cdot \ell^3 \cdot m}} = \sqrt{\frac{24 \cdot 3,5 \cdot 10^{10} \cdot 1,302 \cdot 10^{-3}}{0,4137 \cdot 5^3 \cdot 438250}} = 6,947 \text{ рад/с} .$$

Периоды колебаний

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{2,424} = 2,591 \text{ с} , \quad T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{6,947} = 0,904 \text{ с} .$$

Технические частоты ν_1 и ν_2 равны

$$\nu_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{2,424}{2\pi} = 0,3860 \text{ Гц} , \quad \nu_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{6,947}{2\pi} = 1,1062 \text{ Гц} .$$

4. Определение форм собственных колебаний

Вспоминаем, что частотное уравнение (3.1) получалось приравниванием нулю определителя системы линейных уравнений, в которые входили амплитуды перемещений при свободных колебаниях

$$\begin{cases} \left(\delta_{11} m_1 - \frac{1}{\omega^2} \right) v_1 + \delta_{12} m_2 v_2 = 0 \\ \delta_{21} m_1 v_1 + \left(\delta_{22} m_2 - \frac{1}{\omega^2} \right) v_2 = 0 \end{cases} . \quad (4.1)$$

Частоты собственных колебаний уже определены. Подставляя в (4.1) ω_1 получим уравнения для определения первой формы. Подставляя $\omega = \omega_2$, получим уравнения для определения второй формы.

Для определения первой формы собственных колебаний превратим определитель (3.4) в систему линейных уравнений и подставим в него $\lambda_1 = 3,3975$. Тогда получим

$$\begin{cases} (1 - 3,3975) \cdot v_{11} + 1,4056 \cdot v_{21} = 0 \\ 1 \cdot v_{11} + (2,8112 - 3,3975) \cdot v_{21} = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} -2,3975 \cdot v_{11} + 1,4056 \cdot v_{21} = 0 \\ 1 \cdot v_{11} - 0,5863 \cdot v_{21} = 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

Обратим внимание, что строки этой системы уравнений линейно зависимы, поэтому форму колебаний можно найти из любой строки. Форму колебаний определяется с точностью до множителя. Примем $v_{11} = 1$ и из первой строки системы уравнений (4.2) найдем

$$v_{21} = \frac{2,3975}{1,4056} = 1,706.$$

Аналогично для получения второй формы колебаний, подставим $\lambda_2 = 0,4137$ в систему уравнений для амплитуд. Используя первую строку определителя (3.4), будем иметь

$$(1 - 0,4137) \cdot v_{12} + 1,4056 v_{22} = 0,$$

Принимая $v_{12} = 1$, получим $v_{22} = -0,4171$.

Формы собственных колебаний показаны на рис. 4.1.

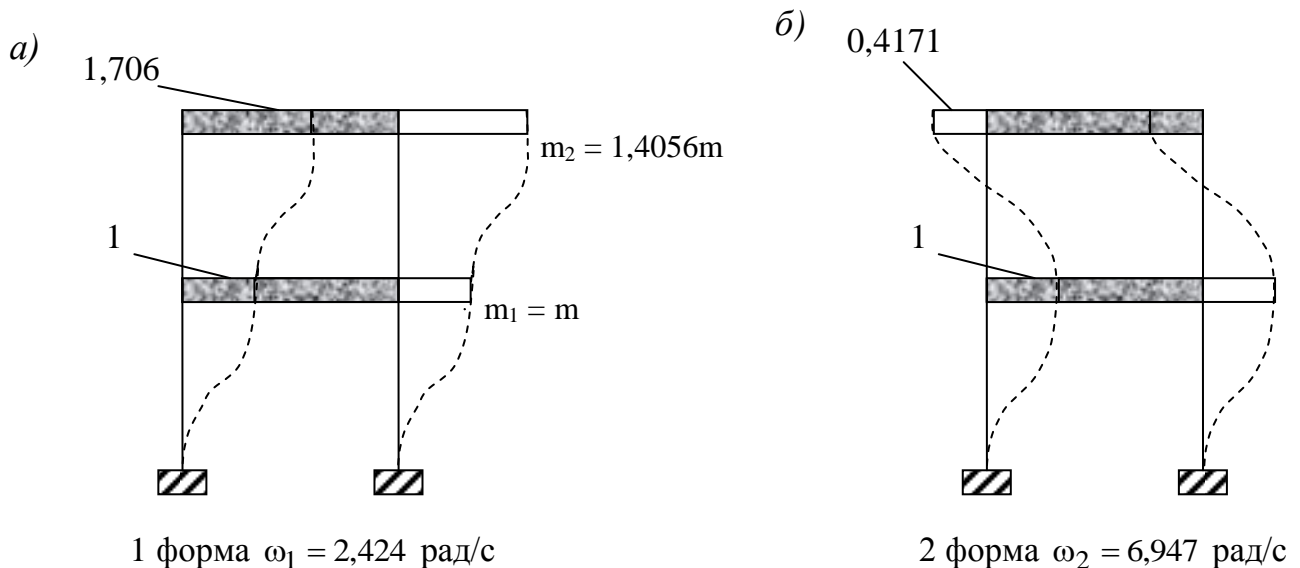


Рис. 4.1

Собственные формы обладают свойством взаимной ортогональности. Проверка ортогональности служит одним из контролей правильности решения

$$\sum_{i=1}^{i=2} v_{i1} m_i v_{i2} = 0.$$

Подставляя наши значения, получим:

$$\begin{aligned} v_{11} m_1 v_{12} + v_{21} m_2 v_{22} &= 1 \cdot m \cdot 1 + 1,706 \cdot 1,4056 \cdot m \cdot (-0,4171) = \\ &= -0,00019 \cdot m \approx 0. \end{aligned}$$

Проверку ортогональности можно выполнять используя и матричные обозначения. Обозначим $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1,706 \end{bmatrix}$ и $\overrightarrow{mv}_2 = \begin{bmatrix} m_1 v_{12} \\ m_2 v_{22} \end{bmatrix}$.

Тогда условие ортогональности может быть выражено в виде равенства нулю скалярного произведения $\vec{v}_1 \cdot \overrightarrow{mv}_2 = 0$. В нашем случае получим

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 \\ 1,706 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m \cdot 1 \\ 1,4056 \cdot m \cdot (-0,4171) \end{bmatrix} &= 1 \cdot m \cdot 1 + 1,706 \cdot 1,4056 \cdot m \cdot (-0,4171) = \\ &= -0,00019 \cdot m \approx 0. \end{aligned}$$

Естественно получаем тот же результат, так как здесь использована лишь другая форма записи условия ортогональности.

5. Определение движения системы по начальным условиям

5.1. Теоретические положения

Рассматриваются колебания линейной упругой системы без учета сил сопротивления с n степенями свободы. Свободными колебаниями называются колебания системы при отсутствии внешних сил. Будем решать задачу об определении этих колебаний по начальным условиям. Пусть в момент времени $t = 0$ для системы известны начальные смещения

$$\vec{y}_0 = \begin{bmatrix} y_{01} \\ y_{02} \\ \vdots \\ y_{0n} \end{bmatrix} \quad \text{и начальные скорости} \quad \vec{\dot{y}}_0 = \begin{bmatrix} \dot{y}_{01} \\ \dot{y}_{02} \\ \vdots \\ \dot{y}_{0n} \end{bmatrix}. \quad (5.1)$$

Требуется определить дальнейшее движение системы, т. е. найти перемещения по всем степеням свободы как функции времени.

Общее решение задачи о свободных колебаниях можно записать в виде сложения движения по собственным формам:

$$\vec{y} = \vec{v}_1(A_1 \cos \omega_1 t + B_1 \sin \omega_1 t) + \vec{v}_2(A_2 \cos \omega_2 t + B_2 \sin \omega_2 t) + \dots + \vec{v}_n(A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t). \quad (5.2)$$

Причем $A_1, B_1, A_2, B_2, \dots$ – произвольные постоянные.

Каждое из слагаемых в формуле (5.2) является частным решением уравнений о свободных колебаниях. Если проанализировать структуру дифференциальных уравнений свободных колебаний то можно убедиться, что сумма отдельных решений также является их решением (уравнения линейные, однородные). Таким образом, колебания по отдельным формам могут накладываться друг на друга без взаимного влияния.

Выражения (5.2) содержат $2n$ произвольных постоянных, которые соответствуют $2n$ начальным условиям. Когда произвольные постоянные будут найдены, движение системы полностью определится.

Подставим в (5.2) значение времени $t = 0$. С учетом того, что $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$, получим:

$$\vec{y}_0 = \vec{v}_1 A_1 + \vec{v}_2 A_2 + \dots + \vec{v}_n A_n. \quad (5.3)$$

Заметим, что (5.3) есть, вообще говоря, система линейных алгебраических уравнений, в которых неизвестными являются искомые постоянные A_1, A_2, \dots, A_n , вектор \vec{y}_0 представляет свободные члены, а вектора собственных форм являются столбцами коэффициентов системы линейных уравнений. Для определения неизвестных можно конечно решить систему уравнений (5.3), однако можно здесь указать более рациональный путь. Умножим равенство (5.3) скалярно на вектор

$$\vec{m} v_k = \begin{bmatrix} m_1 v_{1k} \\ m_2 v_{2k} \\ \vdots \\ m_n v_{nk} \end{bmatrix}.$$

Этот вектор подобен силам инерции формы с номером k .

После умножения получим:

$$\vec{y}_0 \overrightarrow{mv_k} = \vec{v}_1 \overrightarrow{mv_k} A_1 + \vec{v}_2 \overrightarrow{mv_k} A_2 + \cdots + \underline{\vec{v}_k \overrightarrow{mv_k} A_k} + \cdots + \vec{v}_n \overrightarrow{mv_k} A_n . \quad (5.4)$$

Напомним, что скалярное произведение двух векторов дает число, причем все скалярные произведения кроме одного (подчеркнутого) в правой части (5.4) дадут ноль, так как k -ая форма ортогональна ко всем прочим формам. Подчеркнутое произведение будет равно:

$$\vec{v}_k \overrightarrow{mv_k} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i v_{ik}^2 = M_k^* . \quad (5.5)$$

Величина M_k^* есть k -ая обобщенная масса.

С учетом сказанного, выражение (5.4) можно переписать:

$$\vec{y}_0 \overrightarrow{mv_k} = M_k^* A_k .$$

Откуда для константы A_k получаем окончательную формулу:

$$A_k = \frac{\vec{y}_0 \overrightarrow{mv_k}}{M_k^*} . \quad (5.6)$$

Чтобы определить константы B_k , продифференцируем (5.2) по времени, получив таким образом выражения для скоростей.

$$\vec{\dot{y}} = \vec{v}_1 (-A_1 \omega_1 \sin \omega_1 t + B_1 \omega_1 \cos \omega_1 t) + \vec{v}_2 (-A_2 \omega_2 \sin \omega_2 t + B_2 \omega_2 \cos \omega_2 t) + \cdots + \vec{v}_n (-A_n \omega_n \sin \omega_n t + B_n \omega_n \cos \omega_n t) . \quad (5.7)$$

Подставляя в (5.7) значение времени $t = 0$, получим:

$$\vec{\dot{y}}_0 = \vec{v}_1 \omega_1 B_1 + \vec{v}_2 \omega_2 B_2 + \cdots + \vec{v}_n \omega_n B_n . \quad (5.8)$$

Умножив скалярно равенство (5.8) на вектор $\overrightarrow{mv_k}$ и используя свойство ортогональности форм, приходим к формуле:

$$B_k = \frac{\vec{\dot{y}}_0 \overrightarrow{mv_k}}{\omega_k M_k^*} . \quad (5.9)$$

Таким образом, все константы в выражении (5.2) определены, и дальнейшее движение системы становится известным.

5.2. Определение движение системы при заданных начальных смещениях

Пусть данная система получает начальные смещения $y_1(0) = \Delta = 2$ см и $y_2(0) = \Delta = 2$ см, при этом начальные скорости $\dot{y}_1(0)$ и $\dot{y}_2(0)$ равны нулю.

Тогда при $t = 0$ вектора начальных смещений \vec{y}_0 и начальных скоростей $\vec{\dot{y}}_0$ имеют вид

$$\vec{y}_0 = \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \\ \Delta \end{bmatrix}, \quad \vec{\dot{y}}_0 = \begin{bmatrix} \dot{y}_1(0) \\ \dot{y}_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Вычислим обобщенные массы для каждой из собственных форм колебаний (см. рис. 4.1)

$$M_1^* = \sum_{i=1}^2 m_i v_{i1}^2 = m_1 v_{11}^2 + m_2 v_{21}^2 = m \cdot 1^2 + 1,4056m \cdot 1,706^2 = 5,0909m,$$

$$M_2^* = \sum_{i=1}^2 m_i v_{i2}^2 = m_1 v_{12}^2 + m_2 v_{22}^2 = m \cdot 1^2 + 1,4056m \cdot (-0,4171)^2 = 1,2445m.$$

Учитывая, что в данном случае $n = 2$, формулы (5.6) запишем в виде

$$A_1 = \frac{\begin{bmatrix} \Delta \\ \Delta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m \cdot 1 \\ 1,4056 \cdot m \cdot 1,706 \end{bmatrix}}{M_1^*} = \frac{\Delta \cdot m \cdot 1 + \Delta \cdot 1,4056m \cdot 1,706}{5,0909m} = 0,6675 \cdot \Delta,$$

$$A_2 = \frac{\begin{bmatrix} \Delta \\ \Delta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m \cdot 1 \\ 1,4056 \cdot m \cdot (-0,4171) \end{bmatrix}}{M_2^*} = \frac{\Delta \cdot m \cdot 1 + \Delta \cdot 1,4056m \cdot (-0,4171)}{1,2445m} = 0,3324 \cdot \Delta.$$

Из формулы (5.9) получим

$$B_1 = \frac{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_1 \cdot v_{11} \\ m_2 \cdot v_{21} \end{bmatrix}}{\omega_1 M_1^*} = 0,$$

Аналогично $B_2 = 0$.

Используя формулу (5.2), перемещения масс запишем в матричной форме:

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = A_1 \cos \omega_1 t \cdot \vec{v}_1 + A_2 \cos \omega_2 t \cdot \vec{v}_2 =$$

$$= 0,6675 \cdot \Delta \cdot \cos(2,424t) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1,706 \end{bmatrix} + 0,3324 \cdot \Delta \cdot \cos(6,947t) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -0,4171 \end{bmatrix}.$$

Для каждой компоненты получим

$$y_1(t) = 0,6675 \cdot \Delta \cdot \cos(2,424t) + 0,3324 \cdot \Delta \cdot \cos(6,947t),$$

$$y_2(t) = 1,1388 \cdot \Delta \cdot \cos(2,424t) - 0,1386 \cdot \Delta \cdot \cos(6,947t),$$

учитывая, что $\Delta = 2$ см, данные выражения запишем

$$y_1(t) = 1,335 \cos(2,424t) + 0,6648 \cos(6,947t) \text{ см,}$$

$$y_2(t) = 2,2776 \cos(2,424t) - 0,2772 \cos(6,947t) \text{ см.}$$

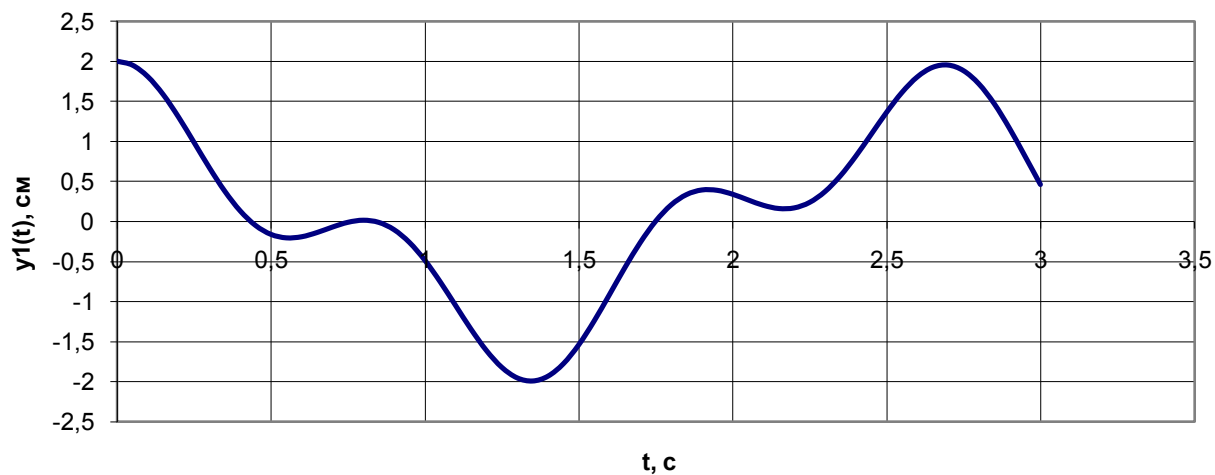


Рис. 5.1

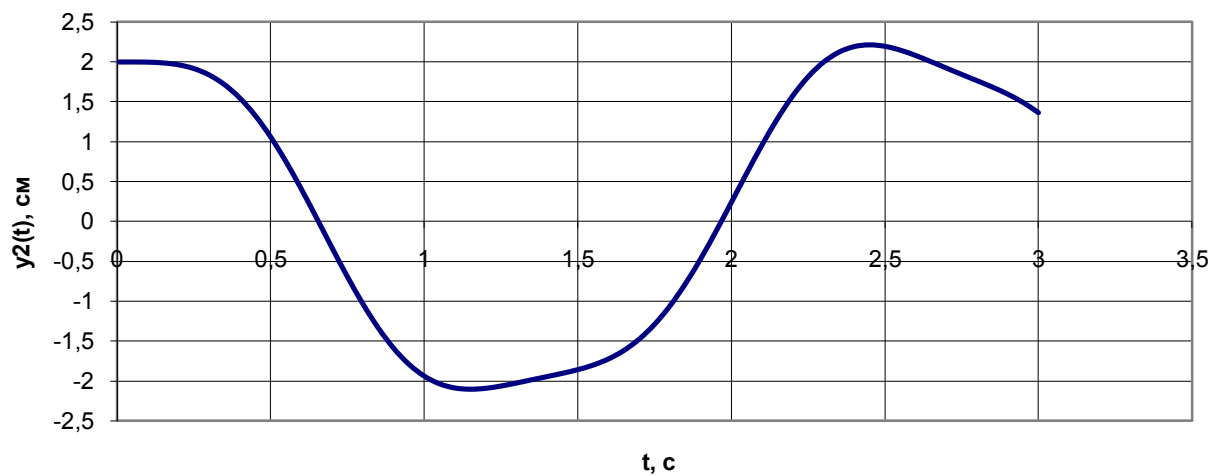


Рис. 5.2

Графики этих функций показаны на рис. 5.1 и рис. 5.2. Как видно из графиков, начальные условия выполняются, т. е. при $t = 0$ $y_1(0) = 2$ см, $y_2(0) = 2$ см, кроме того касательные при $t = 0$ к графику проходят горизонтально, что соответствует нулевым начальным скоростям. Графики могут быть построены разными способами, в данном случае использована программа Microsoft Excel, при этом характерный отрезок времени взят 3 с, что близко к периоду колебаний по первой форме, шаг по времени для точек графика взят 0,05 с.

5.3. Расчет системы при воздействии импульса

Пусть данная система испытывает воздействие импульса $G_0 = 10 \text{ кН} \cdot \text{с}$. Импульс действует на вторую массу (рис. 1.1).

На основании теоремы об изменении количества движения $G_0 = m_2 \cdot \dot{y}_2(0)$, где $\dot{y}_2(0)$ – начальная скорость второй массы, при этом начальная скорость первой массы $\dot{y}_1(0)$ равна нулю.

$$\text{Тогда } \dot{y}_2(0) = \frac{G_0}{m_2}.$$

$$\text{Начальные смещения обеих масс } y_1(0) = y_2(0) = 0.$$

Поэтому векторы начальных возмущений будут равны

$$\vec{y}_0 = \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{\dot{y}}_0 = \begin{bmatrix} \dot{y}_1(0) \\ \dot{y}_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ G_0/m_2 \end{bmatrix}.$$

В соответствии с формулой (5.6) $A_1 = A_2 = 0$. Коэффициенты B_1 и B_2 вычислим по формуле (5.9)

$$B_1 = \frac{\begin{bmatrix} 0 \\ G_0/m_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m \cdot 1 \\ m_2 \cdot 1,706 \end{bmatrix}}{\omega_1 M_1^*} = \frac{\frac{G_0}{m_2} \cdot m_2 \cdot 1,706}{2,424 \cdot 5,0909m} = 0,13825 \cdot \frac{G_0}{m} = 0,13825 \cdot \frac{10^4}{438250} = 0,003154 \text{ м} = 0,3154 \text{ см},$$

$$B_2 = \frac{\begin{bmatrix} 0 \\ G_0/m_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m \cdot 1 \\ m_2 \cdot (-0,4171) \end{bmatrix}}{\omega_2 M_2^*} = \frac{\frac{G_0}{m_2} \cdot m_2 \cdot (-0,4171)}{6,947 \cdot 1,2445m} = -0,04824 \cdot \frac{G_0}{m} =$$

$$= -0,04824 \cdot \frac{10^4}{438250} = -0,001101 \text{ м} = -0,1101 \text{ см.}$$

Тогда вектор перемещений масс имеет вид

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \mathbf{B}_1 \sin \omega_1 t \cdot \vec{v}_1 + \mathbf{B}_2 \sin \omega_2 t \cdot \vec{v}_2 =$$

$$= 0,3154 \cdot \sin(2,424t) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1,706 \end{bmatrix} - 0,1101 \cdot \sin(6,947t) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -0,4171 \end{bmatrix}.$$

Для каждой компоненты получим

$$y_1(t) = 0,3154 \sin(2,424t) - 0,1101 \sin(6,947t) \text{ см,}$$

$$y_2(t) = 0,5381 \sin(2,424t) + 0,04592 \sin(6,947t) \text{ см.}$$

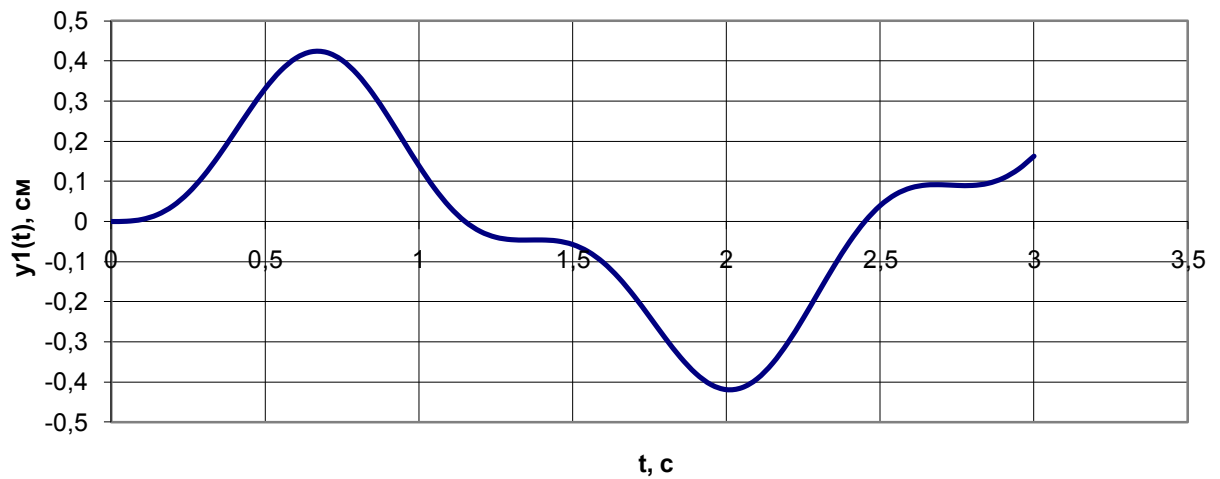


Рис. 5.3

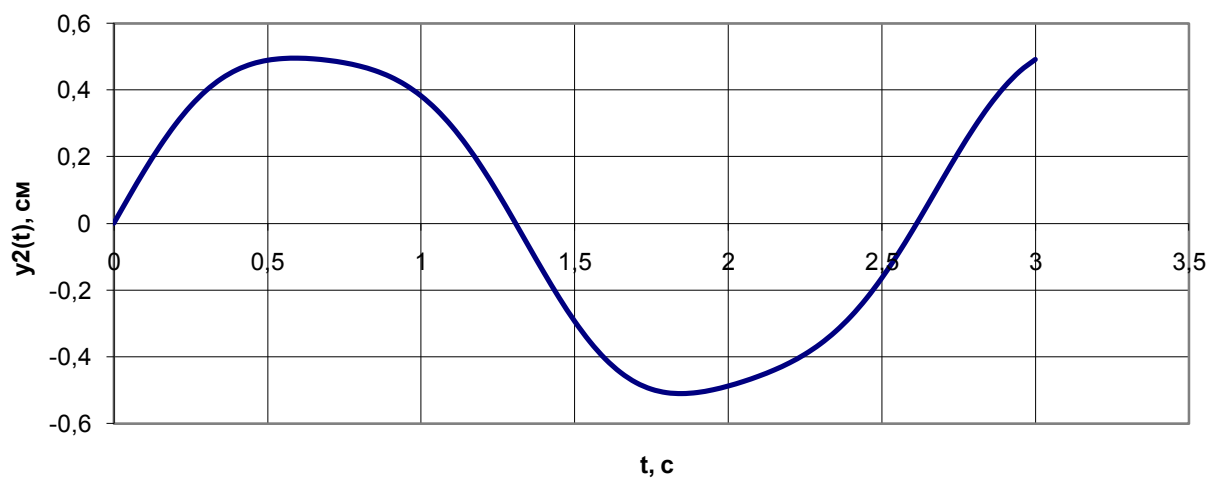


Рис. 5.4

Графики этих функций показаны на рис. 5.3 и рис. 5.4. Как видно из графиков начальные смещения равны нулю, начальная скорость $\dot{y}_2(0)$ не равна нулю, касательная не горизонтальна, что соответствует воздействию начального импульса на эту точку. Для первого графика начальная скорость равна нулю, касательная в точке $t = 0$ проходит горизонтально.

6. Расчет конструкции на сейсмические воздействия (воздействие 8 баллов)

В соответствии актуализированной редакции СНиП II-7 – 81* [3] расчетная сейсмическая нагрузка по направлению координаты с номером j , соответствующая форме колебаний с номером k , определяется по формуле

$$S_{jk} = G_j \cdot K_0 K_1 A K_A K_\Psi \beta_k \eta_{jk}.$$

В этой формуле G_j – вес точечной массы с номером j .

K_0 – коэффициент, учитывающий назначение сооружения и его ответственность, в нашем случае примем $K_0 = 1$, как для обычного малоэтажного здания.

K_1 – коэффициент, учитывающий допускаемые повреждения зданий и сооружений. Примем $K_1 = 0,25$, как для железобетонной монолитной конструкции.

K_A – коэффициент, который зависит от сочетаний расчетной сейсмической интенсивности. В данном случае будем считать, что на всех картах (карты А, В, С) комплекта карт ОСР-97 [3] район сейсмической активности отмечен как 8-бальный, при этом $K_A = 1$.

K_Ψ – коэффициент, учитывающий способность зданий и сооружений к рассеиванию энергии, в нашем случае примем $K_\Psi = 1$.

Коэффициент A принимают 0,1; 0,2 и 0,4 для расчетной сейсмичности строительной площадки 7, 8 и 9 баллов соответственно. В данном случае $A = 0,2$.

Найдем произведение всех коэффициентов, которые будут одинаковы для всех сейсмических нагрузок. Тогда

$$K_0 \cdot K_1 \cdot A \cdot K_A \cdot K_\Psi = 1 \cdot 0,25 \cdot 0,2 \cdot 1 \cdot 1 = 0,05.$$

Коэффициент β_k – коэффициент динамичности, выражающий зависимость максимальных ускорений и сейсмических нагрузок от периода T_k .

Принимаем, что данное сооружение находится на грунте I или II категории. Отметим, что эти же параметры зависимости β_k от T принимаются в нормативном документе [3] при расчете мостов.

Зависимость коэффициента β_k от периода собственных колебаний T представлена в таблице 6.1, в левой части таблицы – графически, в правой даны аналитические выражения для отдельных участков графика.

Таблица 6.1

	<p><u>Зависимость, выраженная формулами</u></p> <p>при $T \leq 0,1$ с $\beta_k = 1 + 15T$,</p> <p>при $0,1$ с $< T < 0,4$ с $\beta_k = 2,5$,</p> <p>при $T \geq 0,4$ с $\beta_k = 2,5(0,4/T)^{0,5}$,</p> <p>кроме того, всегда $\beta_k \geq 0,8$.</p>
--	--

Для первой формы колебаний $T_1 = 2,591$ с, тогда

$$\beta_1 = 2,5(0,4/2,591)^{0,5} = 0,9823.$$

Для второй формы колебаний $T_2 = 0,904$ с, тогда

$$\beta_2 = 2,5(0,4/0,904)^{0,5} = 1,6630.$$

Безразмерную величину η_{jk} называют коэффициентом формы колебаний

$$\eta_{jk} = \frac{v_{jk} \sum_{i=1}^{i=n} m_i v_{ik}}{\sum_{i=1}^{i=n} m_i v_{ik}^2} .$$

Учитывая, что в данном случае $n = 2$, получим выражение для коэффициентов η_{jk}

$$\eta_{jk} = \frac{v_{jk}(m_1 v_{1k} + m_2 v_{2k})}{m_1 v_{1k}^2 + m_2 v_{2k}^2} .$$

Тогда

$$\eta_{11} = \frac{v_{11}(m_1 v_{11} + m_2 v_{21})}{m_1 v_{11}^2 + m_2 v_{21}^2} , \quad \eta_{12} = \frac{v_{12}(m_1 v_{12} + m_2 v_{22})}{m_1 v_{12}^2 + m_2 v_{22}^2} ,$$

$$\eta_{21} = \frac{v_{21}(m_1 v_{11} + m_2 v_{21})}{m_1 v_{11}^2 + m_2 v_{21}^2} , \quad \eta_{22} = \frac{v_{22}(m_1 v_{12} + m_2 v_{22})}{m_1 v_{12}^2 + m_2 v_{22}^2} .$$

Подставляя наши значения (см. рис. 4.1) в формулы для коэффициентов формы, получим

$$\eta_{11} = \frac{1 \cdot (m \cdot 1 + 1,4056 \cdot m \cdot 1,706)}{m \cdot 1^2 + 1,4056 \cdot m \cdot 1,706^2} = 0,6675 ,$$

$$\eta_{21} = \frac{1,706 \cdot (m \cdot 1 + 1,4056 \cdot m \cdot 1,706)}{m \cdot 1^2 + 1,4056 \cdot m \cdot 1,706^2} = 1,1387 ,$$

$$\eta_{12} = \frac{1 \cdot (m \cdot 1 + 1,4056 \cdot m \cdot (-0,4171))}{m \cdot 1^2 + 1,4056 \cdot m \cdot (-0,4171)^2} = 0,3324 ,$$

$$\eta_{22} = \frac{-0,4171 \cdot (m \cdot 1 + 1,4056 \cdot m \cdot (-0,4171))}{m \cdot 1^2 + 1,4056 \cdot m \cdot (-0,4171)^2} = -0,1387 .$$

Обозначим вес первой массы $G_1 = m_1 g = G$, вес второй массы $G_2 = m_2 g = 1,4056G$. Тогда силы S_{jk} равны

$$S_{11} = G_1 \cdot 0,05 \cdot \beta_1 \cdot \eta_{11} = G \cdot 0,05 \cdot 0,9823 \cdot 0,6675 = 0,0328G ,$$

$$S_{21} = G_2 \cdot 0,05 \cdot \beta_1 \cdot \eta_{21} = 1,4056 \cdot G \cdot 0,05 \cdot 0,9823 \cdot 1,1387 = 0,0786G ,$$

$$S_{12} = G_1 \cdot 0,05 \cdot \beta_2 \cdot \eta_{12} = G \cdot 0,05 \cdot 1,6630 \cdot 0,3324 = 0,0276G ,$$

$$S_{22} = G_2 \cdot 0,05 \cdot \beta_2 \cdot \eta_{22} = 1,4056 \cdot G \cdot 0,05 \cdot 1,6630 \cdot (-0,1387) = -0,0162G .$$

Сейсмические нагрузки S_{jk} и соответствующие эпюры изгибающих моментов для двух форм колебаний показаны на рис. 6.1.

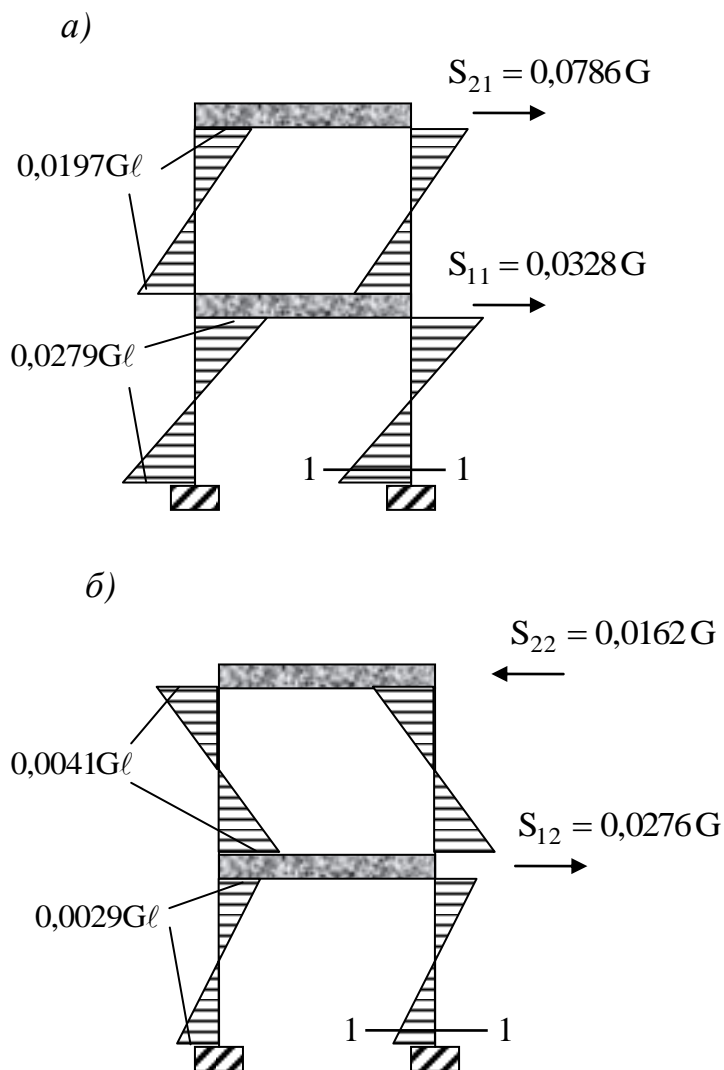


Рис. 6.1

Определим расчетный момент, например, в сечении 1-1. Для расчетного усилия нормы [3] дают формулу

$$N_{\text{расч}} = \sqrt{\sum_{k=1}^{k=p} N_k^2}, \quad (6.1)$$

где p – число форм собственных колебаний, удерживаемых в расчете.

Для нашего случая вычислим расчетный изгибающий момент в сечении стойки 1-1 по формуле

$$M_{\text{расч}} = \sqrt{M_1^2 + M_2^2} = \sqrt{(0,0279G\ell)^2 + (0,0029G\ell)^2} = 0,0281G\ell.$$

Формула (6.1) учитывает, что максимальные сейсмические нагрузки возникают не одновременно. Из проведенных расчетов видно, что доминирующее значение в данном случае имеет первая форма колебаний.

Вычислим также нормальные напряжения в сечении 1-1, учитывая лишь изгибающие моменты от сейсмического воздействия. Момент сопротивления стойки равен

$$W = \frac{bh^2}{6} = \frac{1 \cdot 0,25^2}{6} = 0,010417 \text{ м}^3.$$

Обратим внимание, что момент сопротивления вычислен для условной стойки с удвоенной шириной, что соответствует плоской расчетной схеме. Тогда нормальное напряжение, учитывая, что $G = mg$, равно

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{0,0281G\ell}{0,010417} = \frac{0,0281 \cdot 438250 \cdot 9,81 \cdot 5}{0,010417} = 58 \cdot 10^6 \text{ Па} = 58 \text{ МПа}.$$

Подчеркнем, что полученные напряжения являются условными. Их большие значения свидетельствуют о том, что в действительной конструкции необходимо армирование стоек. При реальном проектировании сечения должны быть рассчитаны по нормативам расчета железобетонных конструкций. При этом возможно потребуется заново определять сейсмические нагрузки, так как жесткости элементов системы изменятся. Однако данный вопрос выходит за рамки выполняемого домашнего задания.

7. Определение частот и форм собственных колебаний с использованием конечно-элементного программного комплекса

Вторая часть задания заключается в определении частот и форм собственных колебаний в заданной пространственной системе, содержащей стержни, пластины, оболочку, методом конечных элементов (МКЭ) [4]. Многие из сделанных ранее упрощающих допущений снимаются. На рис.7.1-7.4 приведены некоторые из полученных форм.

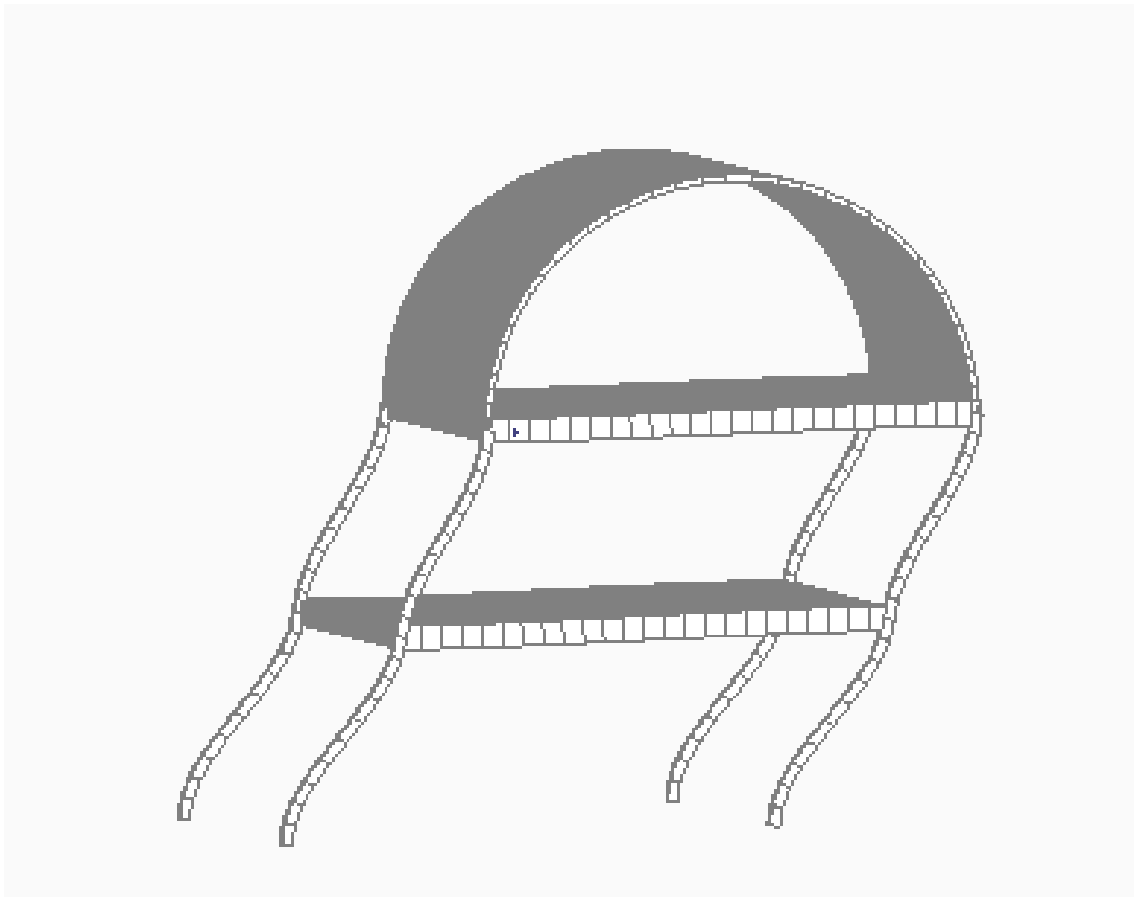


Рис. 7.1. Первая форма, $\nu_1 = 0,3609$ Гц

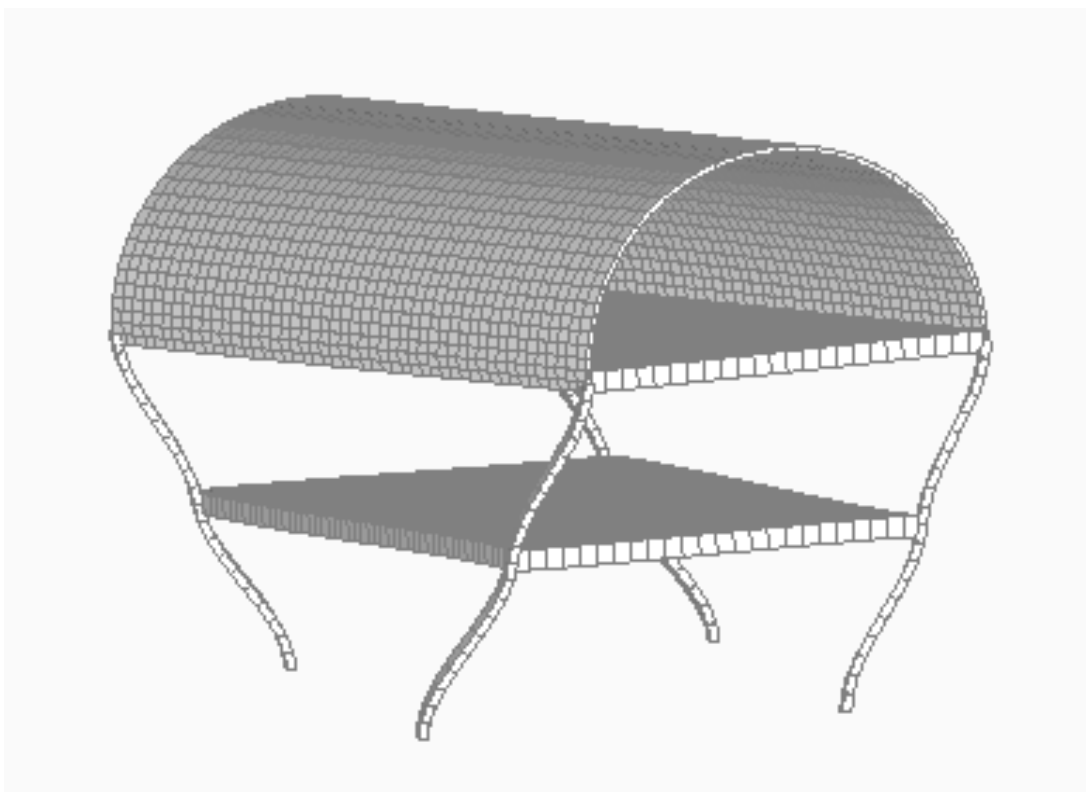


Рис. 7.2. Третья форма, $\nu_3 = 0,7150$ Гц



Рис. 7.3. Четвертая форма, $\nu_4 = 1,0782$ Гц

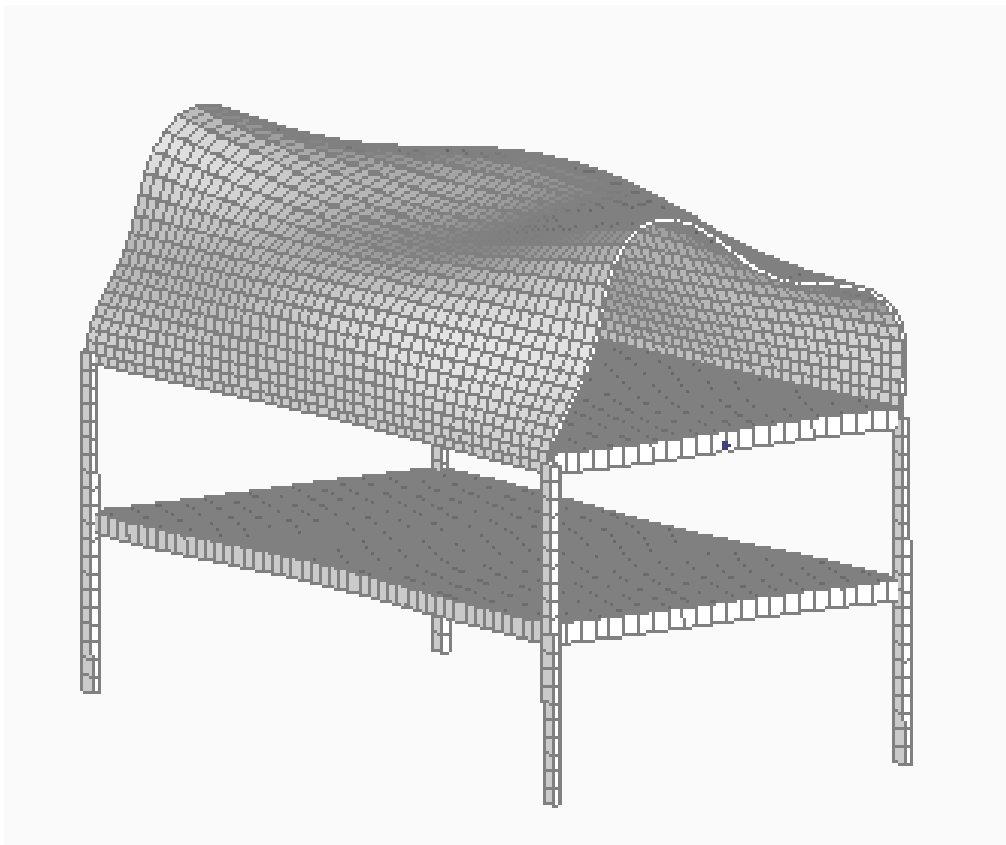


Рис. 7.4. 25-я форма, $\nu_{25} = 17,7490$ Гц

Конечно-элементная расчетная схема содержит 4339 узлов и 4208 элементов. Как видно из приведенных результатов, первая форма, полученная из плоской упрощенной расчетной схемы, соответствует первой форме по МКЭ (рис. 7.1). Имеется удовлетворительное совпадение частот $\nu_1 = 0,3609$ Гц (по МКЭ) и $\nu_1 = 0,3860$ Гц (ручной расчет). То, что для плоской упрощенной схемы являлось второй формой, для МКЭ оказалось формой с номером 4 (рис. 7.3), $\nu_4 = 1,0782$ Гц (по МКЭ) и соответствующая техническая частота полученная для ручного счета составляет 1,1062 Гц. Снова имеется хорошее совпадение результатов, что говорит о разумности принятых упрощающих допущений в ручном расчете. Остальные формы не могут быть получены из плоской упрощенной схемы. Заметим, чем номер формы выше, тем большую роль играют изгибные деформации пластин и оболочек, это отчетливо видно для формы с номером 25 (рис. 7.4).

7. Литература

1. Строительная механика. В 2 кн. Кн. 2. Динамика и устойчивость упругих систем: Учеб. пособие для вузов / А.В. Александров, В.Д. Потапов, В.Б. Зылев; Под ред. А.В. Александрова. – М.: Высш. шк., 2008. – 384 с.
2. Строительная механика. В 2 кн. Кн. 1. Статика упругих систем: Учеб. пособие для вузов / В.Д. Потапов, А.В. Александров, С.Б. Косицын, Д.Б. Долотказин; Под ред. В.Д. Потапова. – М.: Высш. шк., 2007. – 511 с.
3. Свод правил СП 14.13330.2011 Строительство в сейсмических районах. Актуализированная редакция. СНиП II-7 – 81*. Москва 2011. – 86 с.
4. Косицын С.Б., Долотказин Д.Б. Расчет стержневых систем методом конечных элементов с использованием программного комплекса MSC.PATRAN – NASTRAN: Учебное пособие. – М.: МИИТ, 2010. – 68 с.

Содержание

1. Содержание задания	3
2. Определение геометрических и массовых характеристик для плоской расчетной схемы.....	4
3. Определение частот собственных колебаний с использованием плоской расчетной схемы	6
4. Определение форм собственных колебаний	10
5. Определение движения системы по начальным условиям	12
5.1. Теоретические положения	12
5.2. Определение движение системы при заданных начальных смещениях	15
5.3. Расчет системы при воздействии импульса	17
6. Расчет конструкции на сейсмические воздействия (воздействие 8 баллов).....	19
7. Определение частот и форм собственных колебаний с использованием конечно-элементного программного комплекса	23
Литература	26

Учебно-методическое издание

Зылев Владимир Борисович, Штейн Алексей Владимирович,
Павленко Павел Владиславович

**Определение перемещений и внутренних усилий при
динамическом действии нагрузки**

Методические указания
к выполнению домашнего задания
по дисциплинам «Строительная механика»,
«Динамика и устойчивость сооружений»

Подписано в печать

Заказ №

Изд. № 286-13

Тираж 200 экз.

Усл.-печ.л.

Формат 60x84/16

150048, г. Ярославль, Московский пр-т, д. 151.

Типография Ярославского филиала МИИТ.